XVII Olimpíada do Cone Sul
Terceiro Teste de Seleção
08 de abril de 2006

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.

▸PROBLEMA 1

Seja H o ponto de interseção das alturas BB_1 e CC_1 do triângulo ABC, com B_1 sobre AC e C_1 sobre AB. Seja ℓ a reta que passa por A e é perpendicular a AC.

Prove que as retas BC, B_1C_1 e ℓ são concorrentes se, e somente se, H é o ponto médio de BB_1.

▸PROBLEMA 2

Encontre todos os inteiros positivos n para os quais existem primos positivos p e q, com $p+2=q$, tais que os números 2^n+p e 2^n+q são ambos primos.

▸PROBLEMA 3

Na Floresta Retangular há exatamente 1280 mini-sequóias, cada uma com tronco de 1 metro de diâmetro. A Floresta Retangular é, como só poderia ser, retangular, e tem dimensões de 1001 metros e 945 metros. Os Duendes Protetores das Mini-Sequóias da Floresta Retangular querem construir sete quadras de badminton, cada uma com dimensões de 20 metros e 34 metros. É possível fazer isso sem cortar mini-sequóias?

▸PROBLEMA 4

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{2006}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_{2006}$ números reais tais que

$$(a_i x - b_i)^2 \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{2006} (a_j x - b_j)$$

para qualquer x real e para qualquer $i = 1, 2, \ldots, 2006$.

Qual é a maior quantidade possível de números positivos entre os números a_i's e b_i's?