

XVI Olimpíada do Cone Sul
Terceiro Teste de Seleção
09 de abril de 2005

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almoço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
 - É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
 - Tudo o que você escrever deve ser justificado.
 - Todas as questões têm o mesmo valor.
 - Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.
-

► **PROBLEMA 1**

As circunferências S_1 e S_2 cortam-se em dois pontos A e B . A reta que passa por A e é paralela à reta que liga os centros das duas circunferências corta S_1 em $C \neq A$ e corta S_2 em $D \neq A$. A circunferência S_3 , de diâmetro CD , corta S_1 em $P \neq C$ e S_2 em $Q \neq D$.

Prove que as retas CP , DQ e AB são concorrentes.

► **PROBLEMA 2**

Sejam x , y e z números reais positivos tais que a diferença entre quaisquer dois deles é menor do que 2. Prove que

$$\sqrt{xy + 1} + \sqrt{yz + 1} + \sqrt{zx + 1} > x + y + z$$

► **PROBLEMA 3**

Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo com $2n$ cartas. Em cada carta está escrito um número inteiro positivo. As cartas são embaralhadas e colocadas em fila, de modo que os números nas cartas sejam visíveis. Cada jogada consiste em escolher uma carta que esteja em uma das duas extremidades da fila e retirá-la. Arnaldo começa o jogo e o jogo termina quando Bernaldo retira a última carta da fila. A pontuação de cada jogador é a soma dos números das cartas retiradas por ele.

Prove que, não importando que números estão escritos na carta e em que ordem as cartas são enfileiradas, Arnaldo sempre pode obter uma pontuação maior ou igual à de Bernaldo.

► **PROBLEMA 4**

Seja n um inteiro positivo maior que 1 e p um primo positivo tal que n divide $p - 1$ e p divide $n^3 - 1$. Prove que $4p - 3$ é um quadrado perfeito.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.