XVII Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Segundo Teste de Seleção
18 de Fevereiro de 2006

Instruções:
• Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
• É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
• Tudo o que você escrever deve ser justificado.
• Todas as questões têm o mesmo valor.
• Duração da prova: 4h30min.

1. Encontre todas as triplas (a, b, c) de inteiros positivos tais que

$$abc + ab + c = a^3$$

2

a. Sejam u, v, x, y números reais positivos. Prove que:

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} \geq \frac{4(uy + vx)}{(x + y)^2}$$

b. Sejam a, b, c, d reais positivos. Prove que:

$$\frac{a}{b + 2c + d} + \frac{b}{c + 2d + a} + \frac{c}{d + 2a + b} + \frac{d}{a + 2b + c} \geq 1$$

3. Todos os deputados de um parlamento estavam divididos em 10 facções. De acordo com as seguintes regras:

a. Nenhuma facção tinha menos que 5 pessoas.

b. Não existiam duas facções com o mesmo número de pessoas.

Após as férias do parlamento, as facções iniciais se desintegraram e novas facções foram criadas ainda de acordo com as regras anteriores. Além disso, alguns deputados tornaram-se independentes, isto é, não pertenciam a nenhuma facção. Notou-se também que quaisquer dois deputados que pertenciam a uma mesma facção, não estavam mais juntos em uma facção após as férias. Encontre o menor número possível de deputados que se tornaram independentes após as férias.

4. Existe um pentágono convexo tal que qualquer uma das bissetrizes de seus ângulos internos é uma de suas diagonais?