

XVI Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Segundo Teste de Seleção
Primeiro Dia
19 de março de 2005

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4h30min.

PROBLEMA 1

Os números $0, 1, \dots, 9$ são escritos, em alguma ordem, ao redor de um círculo. Prove que existem três números consecutivos cuja soma é pelo menos 15.

PROBLEMA 2

- (a) Sejam a, b, c inteiros positivos tais que

$$c(ac + 1)^2 = (5c + 2b)(2c + b) \quad (*)$$

Prove que se c é ímpar, então c é um quadrado perfeito.

- (b) Existe um inteiro positivo c par satisfazendo (*) para algum a, b ?
- (c) Prove que (*) tem infinitas soluções inteiras positivas.

PROBLEMA 3

- (a) Seja $ABCD$ um quadrilátero e X um ponto do plano tal que os perímetros dos triângulos ABX, BCX, CDX e DAX são iguais. Mostre que $ABCD$ é circunscritível.
- (b) Mostre que existe um quadrilátero circunscritível $ABCD$ tal que nenhum ponto X do plano satisfaz as condições do item (a).