

XV Olimpíada do Cone Sul
Segundo Teste de Seleção
20 de março de 2004

INSTRUÇÕES:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
 - É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
 - Tudo o que você escrever deve ser justificado.
 - Todas as questões têm o mesmo valor.
 - Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.
-

► **PROBLEMA 1**

Os pontos D, E e F estão sobre os lados BC, CA e AB do triângulo ABC, respectivamente, de modo que os segmentos AD, BE e CF passam por um mesmo ponto G. Prove que se os quadriláteros AFG, BDGF e CEGD são circunscritíveis e os círculos inscritos a esses três quadriláteros são tangentes dois a dois então o triângulo ABC é equilátero.

► **PROBLEMA 2**

Algumas casas de um tabuleiro retangular $m \times n$, $m, n \geq 2$, são coloridas de branco. As demais casas são coloridas de preto. No começo, um besouro, vindo de fora do tabuleiro, entra em uma casa no bordo do tabuleiro. A casa na qual o besouro entrou é recolorida na cor oposta. A cada passo, o besouro move-se para uma casa vizinha (ou seja, com um lado comum com a casa anterior), e a casa na qual o besouro entra é recolorida na cor oposta. Após um número finito de passos, o besouro, estando em uma casa no bordo do tabuleiro, deixa o tabuleiro. O besouro não necessariamente sai do tabuleiro após chegar pela primeira vez em alguma casa no bordo do tabuleiro.

É possível que, após o besouro sair do tabuleiro, todas as casas do tabuleiro estejam coloridas de preto?

► **PROBLEMA 3**

Seja n um inteiro positivo. Prove que não existem inteiros positivos x e y tais que

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{4n+2}$$

► **PROBLEMA 4**

Encontre todas as permutações $(a_1, a_2, \dots, a_{2004})$ de $\{1, 2, \dots, 2004\}$ tais que para todo inteiro i , $1 \leq i \leq 2004$, $2(a_1 + a_2 + \dots + a_i)$ é divisível por $i+1$.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.