XVIII Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Primeiro Teste de Seleção
24 de fevereiro de 2007

INSTRUÇÕES:
• **Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.**
• **É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.**
• **Tudo o que você escrever deve ser justificado.**
• **Todas as questões têm o mesmo valor.**
• **Duração da prova: 4h30min.**

PROBLEMA 1

Ache todos os pares de reais (a, b) satisfazendo

$$2(a^2+1)(b^2+1) = (a+1)(b+1)(ab+1).$$

PROBLEMA 2

Dado um natural n, seja $S(n)$ a soma de seus dígitos. Existe algum natural n para o qual $S(n), S(2n), S(3n), \ldots$ nunca seja um múltiplo de 2007?

PROBLEMA 3

Sejam ABC um triângulo e P um ponto sobre a mediana do lado BC. Sejam também D a interseção de AC e BP e E a interseção de AB e CP. Se os inraios dos triângulos BEP e CDP são iguais, prove que $AB = AC$.

PROBLEMA 4

Prove que existe um conjunto S de 3^{1000} pontos no plano tal que, para cada ponto P de S, existem pelo menos 2000 pontos em S cuja distância para P é exatamente uma unidade.