XVII Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Solução do Primeiro Teste de Seleção
18 de Fevereiro de 2006

Problema 1
Suponhamos, sem perda de generalidade, $m < n$. Então,

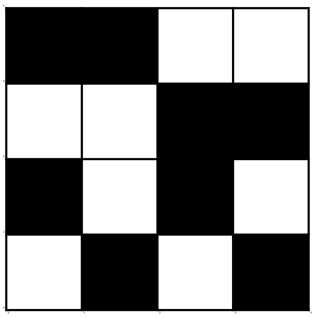
$$\frac{m}{n} = 0, a_1a_2\ldots a_k 43564356\ldots$$
$$= \frac{a_1a_2\ldots a_k, 43564356\ldots}{10^k}$$
$$= \frac{A}{10^k} + \frac{0, 43564356\ldots}{10^k}$$

em que $A = a_1a_2\ldots a_k$

$$= \frac{A}{10^k} + \frac{4356}{9999 \cdot 10^k}$$
$$= \frac{9999A + 4356}{9999 \cdot 10^k}.$$

Observe que 9999 é divisível por 101, mas $9999A + 4356$ não é divisível por 101, pois 4356 não é divisível por 101. Assim, é fácil concluir, que n é divisível por 101.

Problema 2
O maior valor de n é 4. O exemplo para $n = 4$ é mostrado na figura abaixo:



Suponha por absurdo, que exite um tabuleiro 5×5. Na primeira fila, pelo princípio da casa dos pombos, existem pelo menos 3 quadrados de uma mesma cor. suponha que esta cor é preto. Sem perda de generalidade, podemos assumir que as primeiras três células são pretas. Segue que nas primeiras três células das quatro linhas restantes pode ocorrer no máximo um quadrado preto. Assim exitem no máximo 3 colorações possíveis para as primeiras três células dessas 4 linhas. Então duas linhas terão mesma coloração em suas primeiras três células. Isto é uma contradição.

Problema 3
Sejam X a interseção de AD e CE, Y a interseção de AE e CF, e Z a interseção de AC e BE. Denotaremos por $[MNP]$ a área do triângulo MNP, e seja K a área do hexágono $ABCDEF$. É fácil perceber que:

$$\frac{CX}{XE} = \frac{[ACX]}{[AXE]} = \frac{[CDX]}{[DEX]} = \frac{[ACX] + [CDX]}{[AXE] + [DEX]} = \frac{[ACD]}{[ADE]} = \frac{\frac{K}{2} - [AEF]}{\frac{K}{2} - [AEF]}.$$

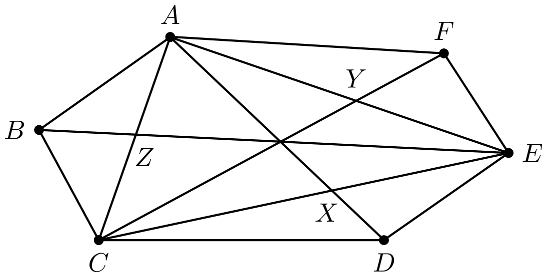
De maneira análoga,

$$\frac{EY}{YA} = \frac{\frac{K}{2} - [CDE]}{\frac{K}{2} - [ABC]}, \quad \frac{AZ}{ZC} = \frac{\frac{K}{2} - [ABC]}{\frac{K}{2} - [CDE]}.$$

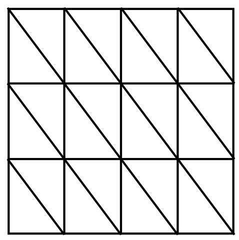
Portanto,

$$\frac{CX}{XE}\cdot\frac{EY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZC}=\frac{\frac{K}{2}-[ABC]}{\frac{K}{2}-[AEF]}\cdot\frac{\frac{K}{2}-[CDE]}{\frac{K}{2}-[ABC]}\cdot\frac{\frac{K}{2}-[AEF]}{\frac{K}{2}-[CDE]}=1.$$

Pela recíproca do teorema de Ceva concluímos que AX, CY e EZ são concorrentes, e com isso AD, BE e CF consequentemente também são concorrentes.



Problema 4
Primeiramente veja na figura ao lado que é possível dividir um quadrado 12×12 em 24 triângulos (3,4,5). Aplicando um homotetia de razão 5 nesse quadrado, é possível ver que podemos também dividir um quadrado 60×60 em 24 triângulos pitagóricos. Agora divida um quadrado 84×84 como mostrado na FIGURA 2:



Onde o quadrado interior é um quadrado 60×60 e os quatro triângulos retângulos são $(36, 48, 60)$. Aplicando um homotetia de razão 5 nesse novo quadrado, é possível ver um quadrado 420×420 pode ser particionado em 28 triângulos pitagóricos. Desse modo divida um quadrado 588×588 de maneira análoga (como mostra a FIGURA 3)

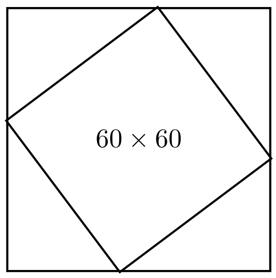


FIGURA 2

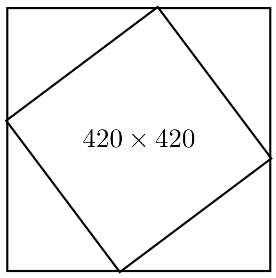


FIGURA 3

Desse modo, provamos que é possível dividir o quadrado em 32 triângulos pitagóricos. Agora aplicando uma homotetia de razão 2 e dividindo um dos triângulos retângulos em quatro iguais obtemos uma configuração com três triângulos a mais. Repetindo essa operação diversas vezes obtemos uma configuração com 2006 triângulos.