XVI Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Primeiro Teste de Seleção
05 de março de 2005

PROBLEMA 1
Seja P um ponto do arco menor AB da circunferência circunscrita Γ ao quadrado $ABCD$. Os segmentos AC e PD se intersectam em Q e AB e PC em R. Mostre que QR é a bissetriz do ângulo $\angle PQB$.

PROBLEMA 2
Um número inteiro é escrito em cada casa de um tabuleiro $n \times n$, $n \geq 3$. Sabe-se que a soma dos números das casas de qualquer subquadrado 2×2 e 3×3 é par. Ache todos os valores de n para os quais a soma dos números de todas as casas do tabuleiro é necessariamente par.

PROBLEMA 3
Sejam a, b, c, d inteiros positivos tais que $a < b \leq c < d$, $ad = bc$ e $\sqrt{d} - \sqrt{a} \leq 1$. Prove que a é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 4
Dado um polígono convexo com $n \geq 5$ lados, prove que existem no máximo $n(2n-5)/3$ triângulos de área 1 formados pelos vértices do polígono.