XVI Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Primeiro Teste de Seleção
05 de março de 2005

PROBLEMA 1
Seja P um ponto do arco menor AB da circunferência circunscrita Γ ao quadrado $ABCD$. Os segmentos AC e PD se intersectam em Q e AB e PC em R. Mostre que QR é a bissetriz do ângulo $\angle PQB$.

(Solução de Lucio Eiji Assaoka) Seja P' a interseção de BQ com Γ. Observe que se tomarmos o diâmetro AC como eixo de simetria, P será simétrico a P', donde $\widehat{P'A} = \widehat{PA}$. Daí, $\angle PBA = \angle ABP' \Rightarrow AB$ é bissetriz de PBP'. Também, $\angle BPC = \angle CPD = 45^o$, de modo que CP é biissetriz de $\angle BPD$. Mas então R é o incentro de BPQ, e portanto QR é bissetriz $\angle PQB$.

PROBLEMA 2
Um número inteiro é escrito em cada casa de um tabuleiro $n \times n$, $n \geq 3$. Sabe-se que a soma dos números das casas de qualquer subquadrado 2×2 e 3×3 é par. Ache todos os valores de n para os quais a soma dos números de todas as casas do tabuleiro é necessariamente par.

(Solução de Henrique Pondé de O. Pinto) Se n é múltiplo de 2 ou 3, então claramente a soma total é par. Para isso, basta dividir o tabuleiro em quadrados 2×2 e 3×3, respectivamente. Vejamos então quando n é congruente a 1 ou 5 módulo 6. Nesses casos, a soma não é necessariamente par. Um exemplo pode ser obtido colocando 1 nas casas das colunas congruentes a 0 e 1 módulo 3 e 0 nas casas restantes.

PROBLEMA 3
Sejam a, b, c, d inteiros positivos tais que $a < b \leq c < d$, $ad = bc$ e $\sqrt{d} - \sqrt{a} \leq 1$. Prove que a é um quadrado perfeito.

(Solução de Edson Augusto B. Lopes) Temos

$$\begin{aligned}
d-a &> c-b \\
(d-a)^2 &> (c-b)^2 \\
(d-a)^2 + 4ad &> (c-b)^2 + 4bc \\
(a+d)^2 &> (b+c)^2 \\
a+d &> b+c \\
a+d &\geq b+c+1.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\sqrt{d} - \sqrt{a} = 1$. De fato, se $\sqrt{d} - \sqrt{a} < 1$, então

$$\begin{aligned}
d+a &< 2\sqrt{ad} + 1 \\
&= 2\sqrt{bc} + 1 \\
&\leq b+c+1,
\end{aligned}$$

um absurdo (na última passagem, utilizamos a desigualdade entre as médias). Assim, $\sqrt{d} - \sqrt{a} = 1 \Rightarrow d + a \leq b + c + 1$. Daí, $d + a = b + c + 1$, e para haver igualdade devemos ter $b = c$. Portanto

$$\begin{aligned} a + d &= 2b + 1 \\ ad &= b^2 \end{aligned}$$

Se p é um primo que divide a e d, então p divide b e $2b + 1$, absurdo. Logo, $(a, d) = 1$, donde concluímos que a e d são quadrados perfeitos.

PROBLEMA 4
Dado um polígono convexo com $n \geq 5$ lados, prove que existem no máximo $n(2n-5)/3$ triângulos de área 1 formados pelos vértices do polígono.

(Solução de Ramon Moreira Nunes) Cada aresta do polígono pode estar em no máximo 4 triângulos de área 1: dois de cada lado. De fato, cada vértice deverá estar em uma reta paralela à aresta. Se existissem 3 pontos sobre essa reta, o polígono não seria convexo. Melhorando a contagem, lados do polígono (n lados) podem estar em no máximo 2 triângulos e arestas com exatamente um vértice adjacente (n arestas) podem estar em no máximo 3. Assim, o máximo de triângulos de área 1 é

$$\frac{2 \cdot n + 3 \cdot n + 4 \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2} - 2n\right)}{3} = \frac{n(2n-5)}{3}$$