Primeira Prova de Seleção
XIV Olimpíada De Matemática do Cone Sul

06 de março de 2004

PROBLEMA 1 *É possível, para algum inteiro positivo n, escrever os números n, n^2 e n^3 utilizando apenas uma vez cada um dos algarismos* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *e* 9*?*

PROBLEMA 2 *No quadrilátero convexo $ABCD$ com lados AD e BC não paralelos, sejam M e P sobre os lados AB e CD, respectivamente, tais que*

$$\frac{MA}{MB} = \frac{PD}{PC}$$

e seja Q um ponto qualquer sobre o lado AD. A paralela a MP por Q corta as paralelas a BC por A e D nos pontos X e Y, respectivamente. Prove que MX, PY e BC são concorrentes.

PROBLEMA 3 *Encontre todas as ternas de números reais (x, y, z) tais que*

$$2x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{z-1} + 2z\sqrt{x-1} \geq xy + yz + zx.$$

PROBLEMA 4 *Sejam m e n inteiros positivos maiores que 1. Considere o arranjo retangular $m \times n$ de pontos no plano. Exatamente k desses pontos são coloridos de vermelho, de forma que nenhum triângulo retângulo com os dois catetos paralelos aos lados do arranjo retangular possui todos os 3 vértices pintados de vermelho. Determine o maior valor possível para k.*