I Olimpíada Cearense de Matemática

10 de outubro de 1981

1ª PARTE

Coloque certo ( ) ou errado (E) nas proposições abaixo:

01. ( ) O número $5! - 1$ é primo.

02. ( ) Se os lados de um triângulo medem $2\,cm$, $3\,cm$ e $4\,cm$, então sua área é maior que $4\,cm^2$.

03. ( ) Se a seqüência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ é uma progressão aritmética, então a seqüência $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, \ldots, 2^{a_n}, \ldots$ é uma progressão geométrica.

04. ( ) O último recenseamento revelou que uma certa cidade tem P habitantes. Se $\log_{10} P = 4{,}03$ então a cidade tem mais de 10.000 habitantes.

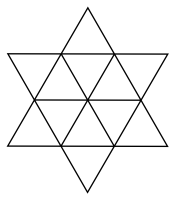
05. ( ) É possível compor o piso da sala de uma residência com ladrilho cerâmico, onde todas as peças têm a mesma dimensão e a forma de um pentágono regular.

06. ( ) Se θ é o ângulo interno de um polígono regular de n lados, então $\cos\theta = -\cos\dfrac{2\pi}{n}$.

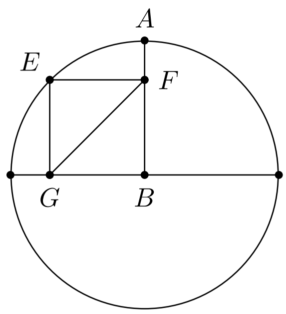
07. ( ) A equação $x^2 - \operatorname{sen} x = 0$ tem exatamente duas soluções em $\mathbb{R}$.

08. ( ) Se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é bijetiva e crescente então a sua inversa é decrescente.

09. ( ) A figura abaixo contém exatamente 20 triângulos.



10. ( ) Considere a circunferência de raio igual a $2\,cm$ e centro B. Considere o quadrado $GBFE$. Então o comprimento de $\overline{GF}$ é maior que $2\,cm$.



2ª PARTE

▸ **Problema 1**

a) Apresente um exemplo de progressão aritmética.

b) Apresente uma equação do 2º grau possuindo duas raízes distintas.

c) Defina função injetiva e dê um exemplo.

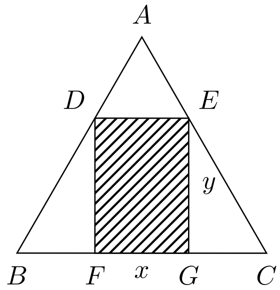
▸ **Problema 2**

a) Apresente o desenvolvimento de $(x-y)^n$, n inteiro positivo.

b) Se $(\sqrt{3}-1)^5 = a\sqrt{3}-b$, com a e b racionais, determinar os valores de a e de b, sabendo que $\sqrt{3}$ é irracional.

▶ **Problema 3**

Qual a área máxima de um retângulo inscrito num triângulo eqüilátero de lado $6\,cm$, estando a base do retângulo sobre um lado do triângulo?

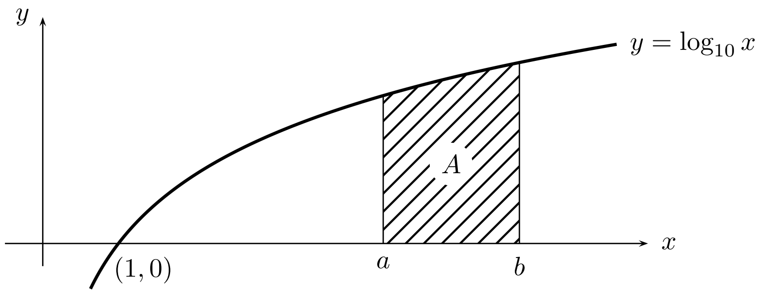


▶ **Problema 4**

Prove que não existem inteiros m e n tais que $m^2 = n^2 + 1954$.

▶ **Problema 5**

Se a média geométrica entre a e b é igual a 10, mostre que a área do trapézio A é numericamente igual a altura do mesmo.

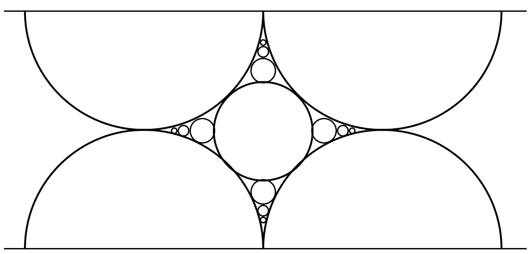


▶ **Problema 6**

Determine o domínio máximo de f em $\mathbb{R}$ e o conjunto de valores, onde $f(x) = 2^{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}$.

▶ **Problema 7**

Na figura, r e s são retas paralelas e A_1, A_2, A_3 e A_4 são semi-circunferências de raio 1. Determine a soma dos infinitos diâmetros das circunferências esboçadas na figura.



▶ **Problema 8**

Considere a função $f : A \to A$, com $A = \mathbb{R} - \{1\}$, dada por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Então:

a) Calcule $f(f(x))$, $\forall x \in A$.

b) Interprete o resultado encontrado em a).

c) Calcule $f^{1981}(x)$, onde $f^{1981} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{1981 \text{vezes}}$.

Problema 9

Dê condições sobre a, b e c para que o sistema

$$\begin{cases} x + ay + a^2z &= 1 \\ x + by + b^2z &= 2 \\ x + cy + c^2z &= 3 \end{cases}$$

tenha solução única.

Problema 10

Considere uma circunferência de raio R. Construa prismas retos de altura H e cuja base é limitada por um polígono regular inscrito na circunferência considerada. Analise a existência dos volumes máximos e mínimos entre sólidos construídos segundo o processo acima. Apresente os argumentos.

II Olimpíada Cearense de Matemática

16 de outubro de 1982

1ª PARTE

Coloque certo (C) ou errado (E) nas proposições abaixo:

01. ( ) Sabendo-se que $f^n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{vezes}})(x)$ e sendo $f(x) = \dfrac{1}{x}$, então $f^{14}(10) = 10$.

02. ( ) Se x e y são soluções do sistema

$$\begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

então $x > 2$.

03. ( ) Se o determinante da matriz associada a um sistema homogêneo é nulo, então o sistema temuma infinidade de soluções.

04. ( ) O domínio da função $f(x) = \log_5(|x| - 2)$ é $(-2, 2)$.

05. ( ) $x^3 + ax^2 + x + a$ é divisível por $x + a$.

06. ( ) A área lateral de um prisma reto é dada pelo produto do perímetro de sua base pela altura correspondente.

07. ( ) A inversa de uma função crescente é decrescente.

08. ( ) $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p} = 0$, onde $p, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n$.

09. ( ) Os gráficos das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ se interceptam 4 vezes no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

10. ( ) Não existe um plano que contenha duas retas reversas.

2ª PARTE

Resolva os CINCO problemas a seguir

▸ Problema 1

Depois de k dias de férias, um estudante observa que:

i) Choveu 7 dias, de manhã ou à tarde.

ii) Quando chove de manhã não chove à tarde.

iii) Houve 5 tardes sem chuva.

iv) Houve 6 manhãs sem chuva.

Qual o valor de k?

▸ Problema 2

a) Prove que, dados dois números positivos x e y, vale a seguinte desigualdade: $\sqrt{x \cdot y} \leq \dfrac{x+y}{2}$ (isto é, a média geométrica é menor ou igual a média aritmética);

b) Prove que, dados três números positivos a, b e c, vale a seguinte desigualdade:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

▸ Problema 3

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$. É possível construir um retângulo de modo que o gráfico de f esteja contido neste retângulo? Justifique sua resposta.

▶ **Problema 4**

Seja $f : A \to B$ uma função invertível definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$, sendo $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{5}{2}\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -\frac{1}{4}\}$. Encontre $f^{-1}(y)$.

▶ **Problema 5**

"Duas torres, uma com 30 passos e a outra com 40 passos de altura, estão à distância de 50 passos uma da outra. Entre ambas se acha uma fonte, para a qual dois pássaros descem no mesmo momento do alto das torres com a mesma velocidade e chegam ao mesmo tempo. Qual as distâncias horizontais da fonte às duas torres?"
(Leonardo de Pisa, Liber Abaci, 1202).

3ª PARTE

Escolha Somente CINCO dos DEZ problemas a seguir

▶ **Problema 1**

As medidas dos lados de um retângulo são dados por números inteiros. Quais os comprimentos desses lados para que o perímetro e a área do retângulo se exprimam pelo mesmo número?

▶ **Problema 2**

Resolva a equação $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

▶ **Problema 3**

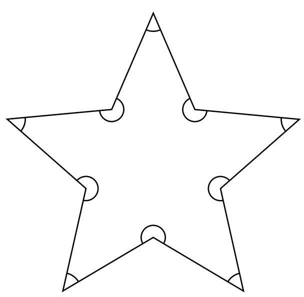
a) Mostre que cossec $a = \text{cotg}\,\frac{a}{2} - \text{cotg}\,a$.

b) Calcule a soma $S = \dfrac{1}{\text{sen}\ a} + \dfrac{1}{\text{sen}\ 2a} + \dfrac{1}{\text{sen}\ 4a} + \cdots + \dfrac{1}{\text{sen}\ 2^n a}$, onde $n \in \mathbb{N}$.

▶ **Problema 4**

Considere o polígono estrelado de 5 (cinco) pontas, conforme a figura.

a) Encontre a soma dos ângulos internos do polígono da figura;



b) Deduza a expressão da soma dos ângulos internos de um polígono estrelado (construído de forma análoga ao polígono da figura) com n pontas.

▶ **Problema 5**

Considere o triângulo aritmetico de Fibonacci, constituído dos números ímpares dispotos da forma abaixo:

										1	1ª linha
									3	5	2ª linha
								7	9	11	3ª linha
							13	15	17	19	...
						21	23	25	27	29	...
					31	33	35	37	39	41	6ª linha
				43	45	47	49	51	53	55	
			57	59	61	63	65	67	69	71	
		73	75	77	79	81	83	85	87	89	...
	91	93	95	97	99	101	103	105	107	109	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

a) Determine o primeiro e o último número da k-ésima linha;

b) Encontre a soma dos números da k-ésima linha;

c) Encontre a média aritmética dos números da k-ésima linha. **OBS:** Fibonacci, a partir do triângulo acima, obteve a prova da igualdade $(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$. Reflita e tente, em casa, obter você também a prova desta igualdade a partir do triângulo.

▸ Problema 6

Quantas soluções inteiras positivas (isto é, quantas triplas ordenadas (x, y, z) de números inteiros positivos que satisfazem a equação) tem a equação $x + y + z = 9$?

▸ Problema 7

Um polinômio $P(x)$ dividido por $x + 1$ tem como resto 4,e dividido por $x^2 + 1$ deixa resto $2x + 3$. Calcular o resto da divisão de $P(x)$ por $(x + 1)(x^2 + 1)$.

▸ Problema 8

Determine o volume do octaedro cujos vértices são os centros das faces de um paralelepípedo retangular de dimensões a, b e c.

▸ Problema 9

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Encontre a matriz A^k, onde $k \in \mathbb{N}$ e $A^k = A \cdot \ldots \cdot A$ (produto com k fatores).

b) Encontre a matriz $M = A + A^2 + \ldots + A^{99}$.

c) Mostre a igualdade: $\det(A + A^2 + \ldots + A^k) = k^2$, onde $k \in \mathbb{N}$.

▸ Problema 10

a) Prove que toda reta que passa pelo centro de um retângulo divide-o em duas partes com a mesma área.

b) Prove que toda reta que passa pelo centro de um hexágono regular divide-o em duas partes com a mesma área.

c) Verifique se é possível generalizar a propriedade acima para polígonos regulares de $2n$ lados.

III Olimpíada Cearense de Matemática

29 de outubro de 1983

1ª PARTE

Coloque certo (C) ou errado (E) nas proposições abaixo:

01. ( ) Se a, b e c estão em progressão aritmética, nesta ordem, e $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então $f(1) = 3b$.

02. ( ) Se x e y são soluções do sistema
$$\begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$$
então $x > 2$.

03. ( ) Se o determinante da matriz associada a um sistema homogêneo é nulo, então o sistema temuma infinidade de soluções.

04. ( ) $x^3 + ax^2 + x + a$ é divisível por $x + a$.

05. ( ) A área lateral de um prisma reto é dada pelo produto do perímetro de sua base pela altura correspondente.

06. ( ) Se $3\text{tg }a + 5\text{cotg }a = 8$, então $\text{tg }a > \dfrac{7}{3}$.

07. ( ) Os arco que satisfazem a inequação $\text{sen }x > \dfrac{1}{2}$ estão no 1º e 2º quadrantes.

08. ( ) Se uma reta r não é paralela a um plano α, então r intercepta infinitas retas do plano α.

09. ( ) A equação $|x + 4| + 2x = -14$ tem somente uma raiz real.

10. ( ) O domínio da função $f(x) = \log_5(|x| - 2)$ é $(-2, 2)$.

2ª PARTE

▸ Problema 1

a) Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$, quantas funções injetivas existem de A em B?

b) Se A tem n elementos e B tem m elementos $(n < m)$, quantas funções injetivas existem de A em B?

▸ Problema 2

Seja C uma circunferência com centro no ponto P. Trace por todos os pontos de C retas tangentes a C e, partindo de P, retas perpendiculares a todas as retas tangentes de C. Que figura se obtém quando unimos todas as interseções entre estas retas perpendiculares? Justifique.

▸ Problema 3

Quantas colorações se podem formar superpondo cores dentre as sete fundamentais do espectro solar?

▸ Problema 4

Calcule o menor valor positivo de x que satisfaz a inequação $\log x \geq \log 2 + \dfrac{1}{2}\log x$.

▸ Problema 5

Entre os triângulos OAB, com vértice O na origem e os outros dois vértices A e B, respectivamente, nas retas $y = 1$ e $y = 3$ e alinhados com o ponto $P(7, 0)$, determinar aquele para o qual é mínima a soma dos quadrados dos lados.

▸ Problema 6

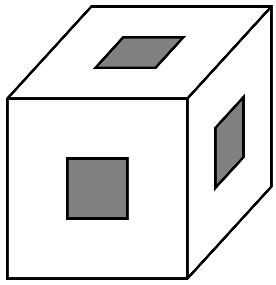
Fatorar o polinômio $p(x) = x^4 + 64$, usando sempre polinômios com coeficientes reais.

▸ Problema 7

Os lados de um triângulo mede 3, 7 e 8, respectivamente. Mostre que os ângulos deste triângulo, medidos em graus, estão em progressão aritmética.

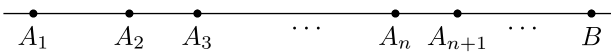
▸ Problema 8

Na figura, o cubo sólido tem aresta de $3\,m$. No centro de todas as faces foram feitas aberturas em forma quadrada de lado igual a $1\,m$ até a face oposta e retiradas estas partes. Calcule o volume do corpo que restou ápós a retirada de todas as partes.



▸ Problema 9

Considere a seqüência de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ colocados sobre uma reta, consecutivamente, como na figura abaixo.



O ponto A_1 é fixado, inicialmente, e os demais satisfazem a condição $\overline{A_nA_{n+1}} = \dfrac{2^n}{3^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que existe um ponto B, sobre esta reta, tal que todos os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ficam à esquerda de B.

▸ Problema 10

a) Sejam a e b números positivos quaisquer. Mostre que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

b) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos quaisquer, n inteiro positivo. Mostre que

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \frac{x_3}{x_{n-2}} + \ldots \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

IV Olimpíada Cearense de Matemática

27 de outubro de 1984

▸ Problema 1

a) Seja $n > 2$ um inteiro. Prove que $(k+1)(n-k) > n$ se $k = 1, 2, 3, \ldots, n-2$;

b) Considere os produtos: $1 \cdot n$, $2 \cdot (n-1)$, $3 \cdot (n-2), \ldots$, $(n-1) \cdot 2$, $n \cdot 1$. Prove que o primeiro e o último destes produtos são menores do que os outros;

c) Prove que, para todo inteiro $n > 2$, $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)^2 \geq n^n$.

▸ Problema 2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$.

a) Veifique que $f(x)$ pode ser escrita nas formas

$$f(x) = x^8 - x^2(x^3 - 1) + (1 - x) \quad \text{e} \quad f(x) = x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1.$$

b) Mostre que $f(x) > 0$, para todo x real.

▸ Problema 3

a) Se $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$ é um número racional ($\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$), prove que $\cos \alpha$ e $\operatorname{sen} \alpha$ são números racionais.

b) Reciprocamente, se $\cos \alpha$ e $\operatorname{sen} \alpha$ são números racionais, prove que $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$ é um número racional.

▸ Problema 4

Para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ sejam as funções $f_0(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$, para todo $n \geq 1$. Mostre que $0 < f_{1984}(1984) < 1$ e determine $f_{1985}(1985)$.

▸ Problema 5

Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{98} + x_{99} + x_{100} & = & 0 \\ x_{99} + x_{100} + x_1 & = & 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Prove que $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{99} = x_{100} = 0$.

▸ Problema 6

São dados: $\log_a b = A$, $\log_q b = B$ e um número inteiro positivo n. Calcule $\log_c b$, onde c é o produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica com primeiro termo a e razão q.

▸ Problema 7

Seja n um inteiro maior que 2. Se c é a hipotenusa de um triângulo retângulo e a e b seus catetos, prove que $c^n > a^n + b^n$.

▸ Problema 8

Considere o desenvolvimento de $P(x) = (x+1)^{10} + (x+1)^{11} + \cdots + (x+1)^{100}$ como polinômio em potência de x. Encontre neste desenvolvimento o coeficiente de

a) x^2.

b) x^{98}.

▸ **Problema 9**

a) Se k é ímpar, prove que o polinômio $p(x) = x^k + a^k$ é divisível por $x + a$ e que $m(x) = x^{2k} - 1$ é divisível por $x^2 - 1$.

b) Seja n um inteiro positivo qualquer e $A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$. Prove que $A_n = (5^n + 3^n) - (3^{n-1} - 1) = 5(5^{n-1} + 3^{n-1}) - (3^n - 1)$.

c) Prove que, para todo inteiro positivo n, A_n é divisível por 8.

▸ **Problema 10**

a) Seja P um ponto no interior de um triângulo eqüilátero com distâncias x, y e z aos três lados, respectivamente. Determine a soma $x + y + z$ em função da altura h do triângulo.

b) Seja um ponto n interior de um tetraedro regular, com distâncias x, y, z e w às quatro faces, respectivamente. Determine a soma $x + y + z + w$ em função da altura H do tetraedro.

V Olimpíada Cearense de Matemática

26 de outubro de 1985

▸ Problema 1

a) Se $a \geq 0$, mostre que $1 + a \geq 2\sqrt{a}$.

b) Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são positivos e $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, mostre que $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geq 2^n$.

▸ Problema 2

Se a, b e c são números reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, prove as desigualdades

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ac \leq 1.$$

▸ Problema 3

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -3x, & x < 0 \end{cases}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} f(x) \leq 0 \\ n, & \text{se} f(x) > 0 \end{cases}$.

a) Encontre o conjunto de valores da função g_{100}.

b) Encontre o menor n para que $\sqrt{119}$ pertença ao conjunto de valores de g_n.

▸ Problema 4

Considere a equação do 2º grau $x^2 + 2px + 2q = 0$, onde p e q são números ímpares.

a) Mostre que nenhum número ímpar pode ser raiz da equação acima.

b) Mostre que nenhum número par pode ser raiz da equação acima.

c) Mostre que as raízes reais da equação acima são números irracionais.

▸ Problema 5

Os pontos M, O, Q e L, N, P estão nesta ordem sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$, marcados de B para A e de C para A. Determine, em graus, o valor do ângulo do vértice A do triângulo ABC, sabendo-se que

$$\overline{CB} = \overline{BL} = \overline{LM} = \overline{MN} = \overline{NO} = \overline{OP} = \overline{PQ} = \overline{QA}.$$

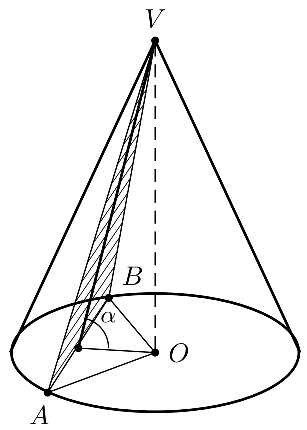
▸ Problema 6

a) Mostre que se n é um inteiro positivo, então $(n-1)n(n+1)$ é um múltiplo de 3.

b) Mostre que se n é um inteiro positivo, então $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ é divisível por 3.

▸ Problema 7

Um plano passando pelo vértice de um cone sólido circular reto, formando com a base deste cone um ângulo $\alpha = 45°$, determina sobre esta base uma corda $\overline{AB}$ de comprimento igual a $2\sqrt{3}\,cm$. Se o arco $\widehat{AB}$ corresponde a um ângulo central $\beta = 60°$, determine o raio r da base, a altura h e o volume do cone. (Veja figura abaixo).


V
B
α
O
A

VI Olimpíada Cearense de Matemática

25 de outubro de 1986

▸ Problema 1

Sejam x e y números reais que satisfazem a equação:

$$2\log(x-2y) = \log x + \log y$$

Encontre o valor numérico de $\dfrac{x}{y}$.

▸ Problema 2

Para cada número real x, seja

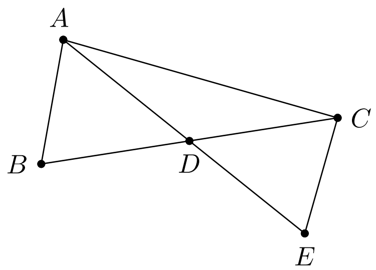
$$f(x) = \min\{4x+1, x+2, -x+6\}.$$

Determine o valor máximo de $f(x)$.

▸ Problema 3

Na figura ao lado, o ponto D é o cruzamento dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BC}$, a medida dos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ é a mesma ($\overline{BD} = \overline{DC}$), os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CE}$ são perpendiculares ($\overline{CA} \perp \overline{CE}$) e o ângulo $B\hat{A}D$ é o dobro do ângulo $D\hat{A}C$ ($B\hat{A}D = 2 \cdot D\hat{A}C$). Mostre que

$$\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AB}.$$



▸ Problema 4

Se p e $p+2$ são números primos estritamente maiores que 3, prove que 6 é um divisor de $p+1$.

▸ Problema 5

Seja $P(x)$ um polinômio de grau n, cujo coeficiente do termo líder (termo de grau n) é igual a $n!2^n$. Mostre que se as raízes de $P(x)$ são os n primeiros números naturais ímpares, então $|P(0)| = (2n)!$.

▸ Problema 6

Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais, uma função satisfazendo:

(I) $f(2) = 2$;

(II) $f(m.n) = f(m).f(n)$ para todos os $m, n \in \mathbb{N}$;

(III) $f(m) > f(n)$ sempre que $m > n$

Mostre que:

(a) $f(2^k) = 2^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

▸ Problema 7

Considere três esferas de raios x, y e z que são tangentes duas a duas e repousam sobre um plano nos pontos A, B e C. Sejam a, b e c as medidas dos lados do triângulo ABC. Mostre:

a) o triângulo ABC é retângulo se, e somente se, é verificada uma relação do tipo $xy = xz + yz$.

b) o conjunto $\{x, y, z\}$ constitui uma progressão aritmética se, e somente se, o conjunto $\{a, b, c\}$ constitui uma progressão geométrica.

VII Olimpíada Cearense de Matemática

31 de outubro de 1987

▶ **Problema 1**

Mostre que $\log_{10} 3$ é irracional.

▶ **Problema 2**

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(p \cdot q) = p \cdot f(q)$, quaisquer que sejam os números reais p e q. Mostre que o gráfico de f é uma reta.

▶ **Problema 3**

Determinar três números inteiros consecutivos tais que o cubo do maior é igual ao triplo da soma dos cubos dos outros dois. Os números que você encontrou se constituem na única solução do problema?

▶ **Problema 4**

Mostre que:

a) Se a e b são números reais com $a < b$, então valem as desigualdades: $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ e $a < a + \dfrac{b-a}{\sqrt{2}} < b$

b) Entre dois números racionais quaisquer distintos existem pelo menos um número racional e um número irracional.

▶ **Problema 5**

Determine todos os números inteiros a e b de modo que uma das raízes da equação $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ seja $1 + \sqrt{3}$.

▶ **Problema 6**

"As coordenadas dos vértices de um triângulo eqüilátero são números inteiros".

Demonstre que a afirmação acima é falsa.

▶ **Problema 7**

Duas pirâmides regulares, uma quadrangular e outra hexagonal, têm bases inscritas numa mesma circunferência de raio R e volumes iguais. Determine a relação entre as alturas das duas pirâmides.

VIII Olimpíada Cearense de Matemática

18 de junho de 1988

▸ Problema 1

Prove que para qualquer inteiro positivo n, $N = n^2 + 1$ não é divisível por 3.

▸ Problema 2

Verifique que o sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ tem exatamente:

a) Três soluções se $a = 1$ ou $a = -1$;

b) Duas soluções se $a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$.

▸ Problema 3

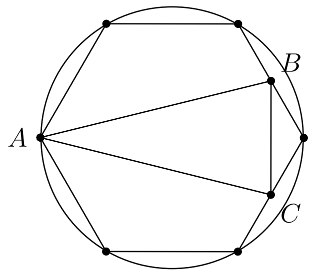
Se $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_3(\log_4(\log_2 y)) = \log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0$, determine o valor de $x + y + z$.

▸ Problema 4

Prove que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não podem ser termos (consecutivos ou não) de uma mesma progressão aritmética. (Lembrete: $\sqrt{10}$ é irracional).

▸ Problema 5

Na figura, B e C são os pontos médios de dois lados consecutivos de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio R. Determine as medidas dos lados do triângulo ABC.



▸ Problema 6

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica se existe um número real positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo número real x. Verifique se $f(x) = \text{sen }(x^2)$ é periódica.

▸ Problema 7

Sobre o fundo horizontal de um vaso cilíndrico circular reto, contendo água, coloca-se uma esfera (sólida) de raio R com a propriedade de que a superfície superior do líquido fique tangente à esfera. Deseja-se que o mesmo aconteça se, em vez da esfera de raio R for colocada outra esfera de raio $m \cdot R$. Calcule o raio x do cilindro e a variação dos valores de m para os quais a situação é realizável.

IX Olimpíada Cearense de Matemática

1989

▸ Problema 1

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real tal que $5^{2x} - 2 \cdot 5^x \cdot f(x) + 1 = 0$ para todo valor real de x. Mostre que $f(x) \geq 1$, para todo x, e que existe um único valor de x tal que $f(x) = 1$.

▸ Problema 2

Moram com Paulo seu pai, sua esposa, seu filho e sua filha. Um recenseador ao chegar à casa de Paulo perguntou: 'Qual a idade das pessoas que moram aqui?'. Paulo respondeu: 'Todas as nossas idades, exceto a idade de meu pai que é um número primo, são quadrados perfeitos. Minha idade é a soma das idades de minha esposa, minha filha e meu filho. A idade de meu pai é a soma da minha idade com a idade de minha esposa e minha filha'. Ajude o recenseador a determinar as idades das pessoas que moram na casa de Paulo.
OBS: Suponha que nenhuma das pessoas envolvidas tenha mais que 120 anos.

▸ Problema 3

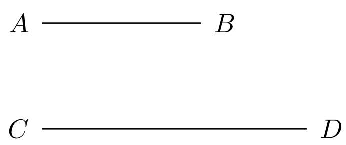
Ao longo de uma rodovia retilínea se encontra um número ímpar de pedras distribuídas individualmente de 10 em 10 metros. Um homem, começando pela última e levando somente uma de cada vez, recolheu todas as pedras para o ponto eqüidistante dos locais onde estavam inicialmente a primeira e a última pedra. Ao final do seu trabalho o homem havia percorrido $3km$. Determine quantas pedras estavam ao longo da rodovia.

▸ Problema 4

Dado o produto de quatro números inteiros consecutivos, determine o menor número inteiro positivo que deve ser somado a este produto, a fim de que o mesmo se transforme em um quadrado perfeito.

▸ Problema 5

Um segmento de reta é formado por pontos. Explique como um segmento de reta $\overline{AB}$ com $3cm$ de comprimento possui tantos pontos quanto um segmento de reta $\overline{CD}$ com $5cm$ de comprimento.



▸ Problema 6

Determine a área de um hexágono convexo que está inscrito em um círculo e tem três lados consecutivos iguais a $3cm$ e os outros três com comprimentos iguais a $2cm$.

▸ Problema 7

Gira-se um triângulo qualquer em torno de um de seus lados e obtem-se um sólido. Qual deve ser o lado escolhido para que o volume do sólido seja máximo?

X Olimpíada Cearense de Matemática

09 de junho de 1990

▶ Problema 1

Determine o algarismo final do número $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, sabendo-se que o último algarismo de $S' = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ é igual a 1.

▶ Problema 2

Os comprimentos dos lados de um triângulo são os inteiros $x - 1$, x e $x + 1$ e o seu maior ângulo é o dobro do menor. Determine o valor de x.

▶ Problema 3

Seja ABC um triângulo tal que as medianas $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$, que se cortam em G, sejam iguais. Prove que o triângulo ABC é isósceles.

▶ Problema 4

Resolva o sistema cujas equações são: $x^{\log_y x} \cdot y = x^{5/2}$ e $\log_4 y \cdot \log_y(y - 3x) = 1$.

▶ Problema 5

Considere um cone circular reto cuja geratriz mede $3\,cm$ e cujo raio da base é igual a $1\,cm$. Seja P um ponto fixo da circunferência da base e C a curva de menor comprimento, na superfície do cone, que partindo de P dá uma volta completa no cone e retorna novamente para o ponto P. Determine o comprimento de C.

▶ Problema 6

a) Prove que não existe inteiro positivo ou racional positivo tal que $t^5 - 10t^4 - 10t^2 - 2 = 0$.
(Lembrete: Se p e q são primos entre si e q divide p^n, então q divide p.)

b) Se x, y e z são inteiros positivos e termos de uma progressão aritmética, mostre que a igualdade $x^5 + y^5 = z^5$ nunca é satisfeita.

▶ Problema 7

Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + 2^{1/x}}$. Mostre que existem números reais $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ tais que $(1 + 2^{1/b_k}) \cdot f(b_k) = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

XI Olimpíada Cearense de Matemática

10 de agosto de 1991

▸ **Problema 1**

a) Se n é um inteiro divisível por 3, mostre que $2^n - 1$ é divisível por 7.

b) Se n não é divisível por 3, mostre que $2^n - 1$ não é divisível por 7.

▸ **Problema 2**

a) Mostre que 1 é a única raiz (real) da equação $x^3 + x^2 = 2$.

b) Mostre que o sistema:

$$\begin{cases} x^3 + x^2 & = & 2 \\ x^2 + xy + y^2 - y & = & 0 \end{cases}$$

não possui soluções reais.

▸ **Problema 3**

Determine a soma dos n primeiros termos da seqüência

$$1, (1+2), (1+2+2^2), (1+2+2^2+2^3), \ldots, (1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}).$$

▸ **Problema 4**

A área de um triângulo ABC é igual a $4m^2$. Se o ângulo A mede $30°$, determine os comprimentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de modo que a medida do lado $\overline{BC}$ seja a menor possível.

▸ **Problema 5**

a) Mostre que $x_1 = 2\cos\dfrac{2\pi}{9}$, $x_2 = 2\cos\dfrac{8\pi}{9}$ e $x_3 = 2\cos\dfrac{14\pi}{9}$ são raízes distintas da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$. (Sugestão: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$)

b) Mostre que x_1, x_2 e x_3 são números irracionais.

▸ **Problema 6**

Seja f uma função real de variável real satisfazendo a equação $e^{f(x)} + e^{-f(x)} - 2x = 0$.

a) Determine o domínio de f.

b) Se $f(x) \geq 0$ para todo x em seu domínio, determine a única função f satisfazendo a equação dada.

▸ **Problema 7**

a) Marca-se 151 pontos distintos no interior de um quadrado unitário Q. Divide-se Q em 36 quadrados idênticos e justapostos e considera-se os círculos circunscritos a estes pequenos quadrados. Prove que existem pelo menos cinco pontos, dos 151 marcados, que estão no interior de um círculo de raio igual a $\dfrac{2}{13}$.

b) Marca-se 383 pontos no interior de um cubo unitário. Prove que, dentre os 383 pontos, existem pelo menos 4 que estão no interior de uma esfera de raio igual a $\dfrac{4}{23}$.

XII Olimpíada Cearense de Matemática

1992

▶ **Problema 1**

Sejam a e b números reais positivos com $a > b$. Se a média aritmética entre a e b é o dobro de sua média geométrica, determine o valor de $\frac{a}{b}$.

▶ **Problema 2**

Determine $a+b+c+d$ sabendo que:

$$\begin{cases} 6a + 2b = 3840 \\ 6c + 3d = 4410 \\ a + 3b + 2d = 3080 \end{cases}$$

▶ **Problema 3**

Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ uma seqüência de inteiros positivos satisfazendo $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, $n = 1, 2, 3 \ldots$. Mostre que:

(a) $a_{n+1} = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 + 1$

(b) Quaisquer dois termos dessa seqüência são primos entre si.

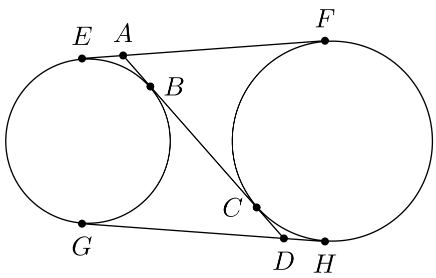
▶ **Problema 4**

(a) Seja $x = \binom{8}{0} - \frac{1}{3}\binom{8}{1} + \frac{1}{3^2}\binom{8}{2} - \frac{1}{3^3}\binom{8}{3} + \ldots + \frac{1}{3^8}\binom{8}{8}$. Calcule $\sqrt{x}$.

(b) Prove que o número $37^{37} + 83^{83}$ é divisível por 3.

▶ **Problema 5**

Na figura abaixo, os círculos têm centros sobre uma mesma reta e $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ e $\overline{AD}$ são tangentes aos dois círculos. Prove que $\overline{AB} = \overline{CD}$.



▶ **Problema 6**

Seja G um conjunto não-vazio de funções não-constantes f, com $f(x) = ax + b$, a e b reais, satisfazendo as condições:

(i) Se f e g pertencem a G, então $f \circ g \in G$.

(ii) Se f pertence a G, então $f^{-1} \in G$.

(iii) Para toda $f \in G$, existe $x_f \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_f) = x_f$.

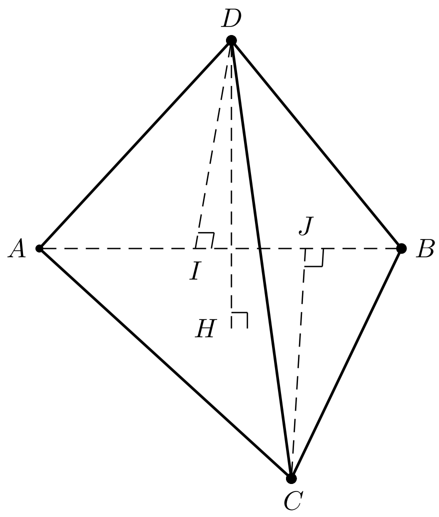
Demonstre que existe um número real k tal que $f(k) = k$, $\forall f \in G$.

▶ **Problema 7**

a) Seja LMN um triângulo tal que $\overline{LN} \le 1$, $\overline{MN} \le 1$ e $\overline{LM} = x$ $(0 < x < 2)$ e K o pé da altura relativa ao lado $\overline{LM}$. Mostre que $\overline{NK} \le \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.

b) Considere um tetraedro em que uma e somente uma aresta tem comprimento maior que 1. Demonstre que o volume do tetraedro é no máximo $\dfrac{1}{8}$.

Sugestão: Mostre que $V \leq \dfrac{x}{6} \cdot \overline{DI} \cdot \overline{CJ}$ e use o item (a) para os triângulos ABC e ABD.



XIII Olimpíada Cearense de Matemática

1993

▶ Problema 1

A área de um triângulo ABC é igual a $4\,m^2$. Se o ângulo A mede $30°$, determine os comprimentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de modo que o comprimento do lado $\overline{BC}$ seja o menor possível.

▶ Problema 2

Se p e q são números complexos, com $q \neq 0$ e se as raízes da equação $x^2 + px + q^2$ têm o mesmo módulo, prove que $|p| \leq 2|q|$.

▶ Problema 3

Considere duas urnas A e B, onde A contém 1000 bolas (inicialmente todas vermelhas) e B contém 5000 bolas (inicialmente todas brancas).
Atente para o seguinte procedimento interativo:

1º passo: Retira-se 100 bolas de B e coloca-se em A, passando A a contar com 1100 bolas e B com 4900 bolas. Em seguida, aleatoriamente, retiram-se 100 bolas de A e repõe-se em B, restabelecendo os números iniciais de 1000 bolas em A e 5000 bolas em B.

2º passo: Depois de executado o 1º passo, torna-se a retirar 100 bolas de B, aleatoriamente, e coloca-se em A. Em seguida retira-se 100 bolas de A, aleatoriamente, e devolve-se a B, novamente estabelecendo os números de 1000 bolas na urna A e 5000 bolas na urna B; e assim sucessivamente.

Após n passos, qual das conclusões é verdadeira?

a) Existem mais bolas brancas em A do que bolas vermelhas em B.

b) O número de bolas brancas em A é o mesmo de bolas vermelhas em B.

c) Existem mais bolas vermelhas em B do que bolas brancas em A.

Justifique sua conclusão.

▶ Problema 4

Seja P um polinômio do quarto grau, sem termo independente, que verifica a identidade $P(x) - P(x-1) \equiv x^3$.

a) Determine P;

b) Mostre a igualdade $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

▶ Problema 5

Seja $A = \{\dfrac{x}{y}; x, y \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 + y^2 - 6x - 6y + 12 = 0\}$. Se a e b são, respectivamente, o maior e o menor valor dentre os elementos de A, determine $a + b$ e $a \cdot b$.

▶ Problema 6

Prove que a equação $x^{1991} + y^{1992} = z^{1993}$ tem infinitas soluções x, y, z de inteiros positivos.

▶ Problema 7

Dados seis pontos distintos do plano, sejam a e b respectivamente a maior e a menor das distâncias entre dois quaisquer destes pontos. Mostre que $\dfrac{a}{b} \geq \sqrt{3}$.

XIV Olimpíada Cearense de Matemática

11 de junho de 1994

▸ **Problema 1**

a) Sabendo-se que os três lados de um triângulo retângulo, de hipotenusa a, estão em progressão geométrica. determine os catetos do triângulo em função apenas de a;

b) Mostre que a altura relativa à hipotenusa também faz parte da progressão.

▸ **Problema 2**

Se x e y são reais positivos, determine todas as soluções do sistema cujas equações são:

$$x^y = y^x \quad \text{e} \quad x^x = y^{9y}.$$

▸ **Problema 3**

Determine os dois valores reais de a para que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + x + a = 0$ tenham pelo menos uma raiz (que pode ser complexa) comum.

▸ **Problema 4**

Se $2^k - 1$ ($k \geq 2$) é um número primo, prove que k também é primo.

▸ **Problema 5**

a) Determine, se possível, uma fatoração para $x^k + y^k$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 1$.

b) Use o item a) para mostrar que o conjunto solução da equação $x^3 + y^3 = 0$, no plano, é exclusivamente uma reta.

▸ **Problema 6**

São dados 1994 pontos no interior de um cubo com aresta igual a $6,7\,cm$. Prove que existe uma esfera com raio igual a $1\,cm$ que contém pelo menos 10 dos pontos dados.

▸ **Problema 7**

Sejam OZ, OY e OX três retas mutuamente ortogonais que se interceptam no ponto O. Se C é um ponto fixo da reta OZ, C diferente de Z, e U e V pontos variáveis em OX e OY, respectivamente, determine o conjunto H dos pontos P tais que $\overline{PU}$, $\overline{PV}$ e $\overline{PC}$ sejam mutuamente ortogonais.

XV Olimpíada Cearense de Matemática

26 de agosto de 1995

▸ Problema 1

Prove que um quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um trapézio qualquer é um paralelogramo.

▸ Problema 2

a) Determine a função polinomial P, do $3^{\underline{o}}$ grau, que apresenta uma raiz nula e satisfaz a condição $P(x-1) = P(x) + 25x^2$ para todo x real.

b) Calcular, em função de n, a soma $25 + 100 + 225 + \ldots + (5n)^2$.

▸ Problema 3

Num triângulo ABC, seus lados de comprimentos a, b e c satisfazem a igualdade $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. Determine a medida, em graus, do ângulo oposto ao lado de comprimento c.

▸ Problema 4

Mostre que existem números reais a e t tais que

$$1981 \cdot \cos\frac{\pi}{15} + 1995 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{15} = a \cdot \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{15}\right).$$

▸ Problema 5

Numa progressão aritmética de números inteiros positivos, o oitavo termo é igual ao cubo do primeiro. Sabendo que a segunda e a quarta potências do primeiro termo pertencem a progressão, determine o segundo termo.

▸ Problema 6

Sejam n natural e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por $f(n) =$ número de fatores (ou divisores) positivos de n. Determinar os valores de n para os quais $2 \cdot f(n) = n$).

▸ Problema 7

a) Uma "gang" tem infinitos bandidos, e cada um desses militantes tem um único inimigo no interior da "gang", que ele quer matar. Prove que é possível reunir uma quantidade infinita de bandidos desta "gang" sem que haja o risco de que um bandido mate um outro durante a reunião.

b) Se cada bandido tiver um número finito, mas indefinido, de inimigos (um bandido pode ter 2 inimigos, um outro somente 1, um terceiro pode ter 20 e assim por diante). Será possível promover uma reunião com infinitos "gangsters" sem risco de derramamento de sangue?

XVI Olimpíada Cearense de Matemática

31 de agosto de 1996

▶ Problema 1

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \log_5(x+y) + \log_6(x-y) = 3 \\ x^2 - y^2 = 125 \end{cases}$$

▶ Problema 2

Considere todas as retas que encontram o gráfico da função $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$ em quatro pontos distintos, digamos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Mostre que o valor de $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ é independente da reta e ache esse valor.

▶ Problema 3

Os lados de um triângulo são expressos, em cm, por três inteiros consecutivos e sua área, em cm^2, é dada por um inteiro. Prove que o menor lado do triângulo é ímpar.

▶ Problema 4

Um hotel possui 100(cem) apartamentos, estando todos fechados e numerados de 1 a 100. Um zelador recebe um pacote contendo uma chave de cada apartamento, totalizando 100 chaves diferentes e não numeradas. Sabe-se que a fechadura de cada apartamento pode ser acionada (aberta ou fechada) por mais de uma chave, exceto a do apartamento 1, e que para cada chave existe um único $n \in \mathbb{N}$ ($n \leq 100$) tal que as fechaduras dos apartamentos numerados com múltiplos de n podem ser acionadas. Após o zelador testar cada chave em todos os apartamentos, realizando uma única operação em cada fechadura (abrindo, fechando ou mantendo, conforme o caso), quais os apartamentos que restarão abertos?

▶ Problema 5

Seja $PQRS$ um quadrilátero convexo de área A e O um ponto em seu interior. Prove que se $2A = \overline{OP}^2 + \overline{OR}^2 + \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2$, então $PQRS$ é um quadrado e O é o seu centro.

▶ Problema 6

Um caminho consiste em uma seqüência de passos de tamanho 1 tomados nas direções norte, sul, leste e oeste. Um caminho é dito simples se ele nunca passa pelo mesmo ponto duas vezes. Seja $f(n)$ o número de caminhos simples de tamanho n que começa na origem. Prove que

$$2^n < f(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

XVII Olimpíada Cearense de Matemática

30 de agosto de 1997

▶ Problema 1

Seja n um inteiro positivo tal que $3n+7$ é um quadrado perfeito. Prove que $n+3$ é a soma de três quadrados perfeitos, com possível repetição.

▶ Problema 2

A soma $S = \frac{1}{1!9!} + \frac{1}{3!5!} + \frac{1}{5!5!}\frac{1}{7!3!} + \frac{1}{9!1!}$ pode ser escrita na forma $\frac{2^a}{b!}$, onde a e b são números inteiros positivos. Encontre a e b.

▶ Problema 3

Determine as raízes reais da equação $x^6 - (a^2+1)x^2 + a = 0$, onde a é um parâmetro real positivo.

▶ Problema 4

Considere o triângulo ABC com o ângulo $A\hat{B}C = 2 \cdot A\hat{C}B$. Seja H o pé da perpendicular de A a $\overline{BC}$ e seja D o ponto sobre o lado $\overline{BC}$ onde o círculo ex-inscrito o toca. Prove que $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{HD}$.
(O círculo ex-inscrito relativo ao lado $\overline{BC}$ é o círculo que tangencia $\overline{BC}$ e os *prolongamentos* dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.)

▶ Problema 5

Decida se é possível escrever os números $1, 2, 3, \ldots, 121$, um em cada casa do tabuleiro 11×11, de tal forma que se dois números são consecutivos, as casas que eles ocupam têm um lado em comum e, além disso, os quadrados perfeitos estejam todos dispostos numa mesma coluna.

▶ Problema 6

Se cada um dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é $+1$ ou -1, e se a soma

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_6 + \ldots + x_nx_1x_2x_3 = 0,$$

prove que n deve ser múltiplo de 4.

XVIII Olimpíada Cearense de Matemática

29 de agosto de 1998

▶ **Problema 1**

Seja $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - 1998^2 + 1999^2$. Expresse S como a soma de 1000 números ímpares, todos eles termos de uma progressão aritmética.

▶ **Problema 2**

Prove que entre três números inteiros quaisquer podemos escolher dois, digamos a e b, tais que $ab^3 - ba^3$ seja divisível por 10.

▶ **Problema 3**

Se n é um número inteiro positivo com 35 algarismos e $\sqrt[31]{n}$ é também um inteiro, determine o valor de $\sqrt[31]{n}$. (Lembre-se que $\log 12,4 < 1,096$ e que $\log 13,6 > 1,128$)

▶ **Problema 4**

Seja T um triângulo de área 1.

a) Mostre que existe um paralelogramo de área 2 que o contém.

b) Se T está contido num paralelogramo P, mostre que P tem área maior ou igual a 2.
(***Obs:*** *Os lados do triângulo podem ter interseção não vazia com os lados do paralelogramo)*

▶ **Problema 5**

Um professor de matemática propõe a seguinte atividade para seus alunos: um aluno escreve no quadro uma fila com seis números inteiros; um segundo aluno escolhe três desses números, digamos x, y e z e os substitui por $x - y - z$, $3x - 3y - 2z$ e $4x - 2y + 4z$, e escreve a nova fila abaixo da primeira, repetindo os números não substituídos. Repete-se o procedimento usando-se a última fila. Após a aula, o quadro é parcialmente apagado, restando legível o seguinte:

•	•	•	•	•	•
1	2	3	4	5	6
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
3	7	2	15	8	8
•	•	•	•	•	•

Prove que algum aluno errou suas contas.

▶ **Problema 6**

Seja S um subconjunto dos números reais tal que:

(I) $1 \in S$.

(II) Se $x, y \in S$ então $x - y \in S$.

(III) Se $0 \neq x \in S$ então $\dfrac{1}{x} \in S$.

Prove que S é fechado para a multiplicação, isto é, dados $x, y \in S$ então $xy \in S$.

XIX Olimpíada Cearense de Matemática

1999

▸ Problema 1

Um aviador está a uma distância h da Terra que vamos admitir como sendo uma esfera de raio r. Se S é a porção total da superfície da Terra visível pelo aviador, encontre S em termos de r e h.

▸ Problema 2

Teorema: Para todo n, num conjunto de n bolas todas elas possuem a mesma cor.
Corolário: Todas as bolas do mundo têm a mesma cor
Demonstração do Teorema
A demonstração do teorema será feita usando o Princípio da Indução Finita. O resultado é válido para $n = 1$ pois, num conjunto com uma bola, todas elas têm a mesma cor! Suponha que o teorema é válido para todo conjunto com i bolas. Considere um conjunto com $i+1$ bolas. Retirando uma delas, o conjunto restante possui i bolas e pela hipótese indutiva todas possuem a mesma cor, digamos amarela. Retire uma das bolas amarela desse conjunto e retorne a bola de cor desconhecida, anteriormente retirada. Obtemos novamente um conjunto com i bolas e pelo o que foi discutido anteriormente possui $i - 1$ bolas amarelas e pela hipótese indutiva possui todas as bolas de mesma cor. Segue que a bola de cor desconhecida também é amarela. Assim todas as $i + 1$ bolas são amarelas.
Como você sabe existem bolas de várias cores. Descubra o que está errado na demonstração do teorema.

▸ Problema 3

Sejam a e z números complexos tais que $|a| < 1$ e $\overline{a}z \neq 1$. Mostre que se $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1$ então $|z| < 1$.

▸ Problema 4

No país da Verdade, onde ninguém mente, reuniram-se os amigos Marcondes, Francisco e Fernando. Entre os três ocorreu a seguinte conversa:
Marcondes fala: estou escolhendo dois números inteiros positivos cujos valores não revelo e vou dar, em segredo, a soma deles para o Francisco e o produto deles para o Fernando.
Francisco fala: o valor que me foi dado não excede 16.
Fernando fala: eu não consigo achar os valores dos dois números escolhidos pelo Marcondes.
Francisco fala: eu já sabia que você não encontraria os valores dos dois números.
Fernando fala: ah, então eu sei quem são os dois números.
Agora responda:

(a) Qual o valor que foi dado a Francisco?

(b) Baseado em que o Fernando fez a última afirmativa?

▸ Problema 5

Uma cidade tem um número finito de linhas de ônibus de modo que:

(a) Cada linha tem, pelo menos, três paradas;

(b) Cada duas paradas são ligadas por alguma linha;

(c) Cada duas linhas têm uma única parada em comum.

Prove que cada linha tem o mesmo número de paradas, digamos n, e que por cada parada passa exatamente n linhas.

▸ Problema 6

Dizemos que a função f possui um ponto de estrangulamento em n se:

$$m < n \Longrightarrow f(m) < f(n) \quad \text{e} \quad m > n \Longrightarrow f(m) > f(n).$$

Prove que se uma função aditiva f (isto é, $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$ se o $mdc(m, n) = 1$) possui uma infinidade de pontos de estrangulamento ela é crescente.

XX Olimpíada Cearense de Matemática

2000

▸ Problema 1

Se um poliedro convexo tem 6 vértices e 12 arestas, prove que toda face dele é um triângulo.

▸ Problema 2

Cinqüenta bolas, numeradas de 2 a 51, devem ser colocadas em caixas, de modo que o máximo divisor comum (mdc) dos números de duas bolas quaisquer de uma caixa não seja o número correspondente a uma bola desta caixa. Encontre o número mínimo de caixas necessárias para guardar todas as bolas. Justifique sua resposta.

▸ Problema 3

Considere todos os subconjuntos não vazios do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, dos n primeiros números naturais. Para cada um desses subconjuntos calculamos o produto de seus elementos. Encontre a soma de todos os produtos obtidos. (Obs: Se um subconjunto tem um único elemento, esse elemento é o produto).

▸ Problema 4

(a) Seja (x, y) um ponto da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Mostre que existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $x = a\cos\theta$ e $y = b\text{sen}\theta$.

(b) Dado um triângulo T_e inscrito na elipse acima, prove que existe um triângulo T_c inscrito na circunferência $x^2 + y^2 = 1$ tal que área$(T_e) = a \cdot b \cdot$ área(T_c).

(c) Encontre os triângulos de área máxima inscritos na elipse do item a.

▸ Problema 5

Sejam a, b, c e d as raízes (nos complexos) do polinômio $x^4 + 6x^2 + 4x + 2$. Encontre um polinômio $p(x)$, do quarto grau, que tenha como raízes a^2, b^2, c^2 e d^2.

▸ Problema 6

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ os vértices de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência unitária S e A um ponto dessa circunferência. Encontre o valor máximo do produto P dos n segmentos $\overline{A_1A}, \overline{A_2A}, \ldots, \overline{A_nA}$ e a posição de A para o qual esse máximo ocorre.

XXI Olimpíada Cearense de Matemática

25 de agosto de 2001

▶ **Problema 1**

Suponha que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que $f(1) = 0$ e que $f(u^n) = nu^{n-1}f(u)$ para todo n natural e todo u real.

▶ **Problema 2**

Se $p > 3$ é primo, prove que o resto da divisão de p^2 por 12 é igual a 1.

▶ **Problema 3**

Num trapézio $ABCD$, $\overline{AB}$ é a base maior e, $\overline{CD}$ a menor. Se $\overline{AB} = 2\overline{AD}$ e se ainda a soma dos ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ é $120°$, prove que um desses ângulos é reto.

▶ **Problema 4**

Sejam $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{2001}(x)$ polinômios a coeficientes reais. Para cada inteiro positivo n existe um par (i, j) com $1 \leqslant i < j \leqslant 2001$ tal que n é raiz da equação $f_i(x) = f_j(x)$. Mostre que entre os 2001 polinômios acima existem pelo menos dois iguais.

▶ **Problema 5**

Achar o menor natural n tal que 2001 é a soma dos quadrados de n inteiros ímpares. Justifique sua solução.

▶ **Problema 6**

Determinar $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$, sabendo-se que:

i) são números em progressão geométrica, nesta ordem;

ii) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ possuem quatro dígitos e a_{10} possui cinco dígitos

(OBS.: todos os números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ estão na base 10)

XXII Olimpíada Cearense de Matemática

01 de setembro de 2002

▶ **Problema 1**

Um quadrado é dividido em quatro triângulos retângulos congruentes e um quadrado menor, conforme a figura 1. Esses quatro triângulos e o quadrado menor são rearranjados da forma indicada na figura 2. O matemático indiano Bhaskara demonstrava o teorema de Pitágoras com a ajuda desses diagramas. Obtenha, a partir das figuras abaixo, uma demonstração do teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados dos seus catetos.

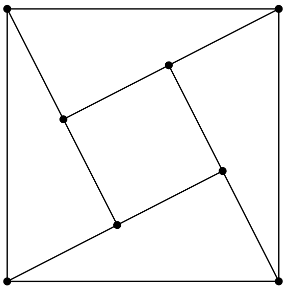


Figura 1

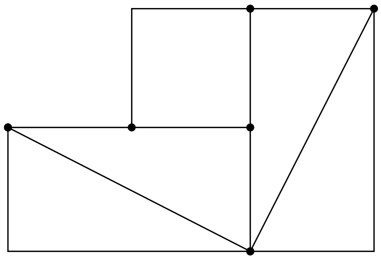


Figura 2

▶ **Problema 2**

Seja A uma matriz $n \times n$ qualquer e X uma matriz com todo os elementos iguais. Mostre que

$$\det(A+X) \cdot \det(A-X) \leq \det A^2.$$

Notação: $\det A$ é o determinante da matriz A.

▶ **Problema 3**

Determinar todos os subconjuntos S dos números complexos que satisfazem aos seguintes requisitos:

1. Se $x, y \in S$, então $xy \in S$.
2. S possui 2002 elementos.

▶ **Problema 4**

Um mágico resolveu exibir seus poderes encontrando, dentre 21 moedas de aparência semelhante, uma moeda falsa, mais leve que as demais, que tinham o mesmo peso. Ele dispôs as moedas em 3 pilhas de 7 moedas cada, denominadas P_1^1, P_2^1 e P_3^1. Ele então comparou os pesos de P_1^1 e P_2^1 numa balança de pratos que indica o maior dentre os pesos comparados. As próximas pesagens foram assim realizadas: ele desmanchava as pilhas P_1^k, P_2^k e P_3^k da pesagem anterior para obter 3 novas pilhas de 7 moedas cada denotadas por P_1^{k+1}, P_2^{k+1} e P_3^{k+1}. A seguir, ele comparava os pesos de P_1^{k+1} e P_2^{k+1} na balança de pratos. Um espectador observou que o mágico seguia sempre os mesmos procedimentos: após a k-ésima pesagem, ele desmanchava uma pilha por vez, de cima para baixo, retirando as moedas uma a uma, e as colocava imediatamente em alguma das pilhas P_1^{k+1}, P_2^{k+1} ou P_3^{k+1} da pesagem subseqüente. Ele se lembra também que sempre que 3 moedas ocupavam posições consecutivas numa mesma pilha P_1^k, P_2^k ou P_3^k elas ocupariam pilhas diferentes na próxima pesagem. Ele não lembra a ordem em que as pilhas eram desfeitas. Sabendo que o mágico não tinha poderes sobrenaturais, qual o procedimento que ele utilizou para realizar a sua mágica com a quantidade mínima de pesagens?

▶ **Problema 5**

Sejam $2 \leq k < n$ números inteiros e A um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Seja B o conjunto de pares $(x, y) \in A \times A$ tais que $x < y$. Chamamos de *altura* de $(x, y) \in B$ ao número $y - x$ e denotamos por $|A|$ o número de elementos de A. Prove que se

$$|A| > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (2n-k)(k-1)},$$

então existem pelo menos k elementos de B com a mesma altura.

▶ **Problema 6**

Seja n um inteiro positivo e $A = \{a_i\}_{i=0}^{n}$ uma seqüência de sinais, isto é, cada $a_i \in \{0, 1\}$. Definimos então o polinômio

$$b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0 = a_0 \prod_{i=1}^{n} (X + a_i a_{i-1} \frac{1}{p^{i-1}}),$$

onde $p \neq 0$ é um número real. Encontre todos os valores positivos de p para os quais a seqüência de sinais $B = \{\frac{b_i}{|b_i|}\}_{i=0}^{n}$ é A na ordem inversa, ou seja, $\frac{b_i}{|b_i|} = a_{n-i}$ para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, quaisquer que sejam o inteiro n e a seqüência A.

XXIII Olimpíada Cearense de Matemática

22 de setembro de 2003

▸ Problema 1

Mostre que a diferença entre um número racional, suposto distinto de zero e um, e seu inverso, nunca é um número inteiro.

▸ Problema 2

Seja P um ponto no interior de um hexágono regular com lados de comprimento um. Os segmentos que unem P a dois vértices têm comprimento $13/12$ e $5/12$, respectivamente. Determine os comprimentos dos segmentos unindo P aos outros vértices do hexágono.

▸ Problema 3

Ordenamos os pares ordenados (m, n) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definindo uma bijeção $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo as seguintes condições:

1. Se $m_1 + n_1 > m_2 + n_2$, então $f(m_1, n_1) > f(m_2, n_2)$.
2. Se $m_1 > m_2$ e $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$ então
   - $f(m_1, n_1) > f(m_2, n_2)$, se $m_1 + n_1$ é par;
   - $f(m_1, n_1) < f(m_2, n_2)$, se $m_1 + n_1$ é ímpar;

Determine a expressão de $f(m, n)$ em termos de m e n. Obs.: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ é o conjunto dos números naturais.

▸ Problema 4

Um homem acha-se no centro de um círculo. A periferia deste círculo é delimitada por uma cerca, que separa o homem de um cachorro. Admitindo que o cachorro só pode correr ao longo da cerca,

- Prove que o homem pode escapar pulando a cerca sem ser mordido pelo cão se as velocidades máximas possíveis de serem desenvolvidas pelo cachorro e pelo homem estiverem na relação $4 : 1$.
- Determine as relações entre as velocidades máximas do cachorro e do homem para as quais o homem pode escapar.

▸ Problema 5

Uma lista de números complexos distintos $z_1, z_2, \dots, z_n$ é um ciclo de comprimento n para uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se $z_2 = f(z_1)$, $z_3 = f(z_2), \dots, z_n = f(z_{n-1})$ e $z_1 = f(z_n)$. Seja $f(z) = z^2 + 2003$ e $z_1, z_2, \dots, z_{2003}$ um ciclo de comprimento 2003. Calcule

$$\prod_{i=1}^{2003} (f(z_i) + z_i),$$

onde o símbolo $\prod$ indica o produto.

▸ Problema 6

Se a equação geral de uma cônica tem por expressão

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{22} \cdot y^2 + a_{33} + 2a_{12} \cdot xy + 2a_{13} \cdot x + 2a_{23} \cdot y = 0,$$

1. Encontre as condições a serem satisfeitas pelos coeficientes a_{ij} para que a cônica seja degenerada (isto é, contenha uma reta). Sugestão: considere o determinante da matriz simétrica cujas entradas sejam os coeficientes a_{ij} da cônica.
2. Sejam $C_1(x, y) = 0$ e $C_2(x, y) = 0$ as equações de duas cônicas de traços distintos. Seja C_t a cônica dada por $C_t(x, y) = t \cdot C_2(x, y) + (1 - t) \cdot C_1(x, y) = 0$. Mostre que o conjunto dos reais t para os quais C_t é degenerada é solução de uma equação de grau inferior a quatro.
3. Supondo o resultado anterior válido se t tomar valores em $\mathbb{C}$ (complexo), prove que se pode resolver uma equação de grau 4 resolvendo equações de grau inferior a 4.

XXIV Olimpíada Cearense de Matemática

26 de setembro de 2004

▶ **Problema 1**

Qual o menor inteiro positivo com o mesmo número de divisores de 2004?

▶ **Problema 2**

Determine o seno do ângulo entre as alturas baixadas dos vértices de um tetraedro regular.

▶ **Problema 3**

Seja $\alpha \neq 1$ raiz de $X^7 - 1 = 0$. Obter um polinômio com coeficientes inteiros que tenha $a = \mathrm{Re}(\alpha)$ como raiz. (Notação: $\alpha = \mathrm{Re}(\alpha) + i \cdot \mathrm{Im}(\alpha)$.

▶ **Problema 4**

Resolver o sistema linear

$$\begin{array}{l} X_1 + a_1 X_2 + a_1^2 X_3 + \ldots + a_1^{n-1} X_n = -a_1^n \\ X_1 + a_2 X_2 + a_2^2 X_3 + \ldots + a_2^{n-1} X_n = -a_2^n \\ \ldots \\ X_1 + a_n X_2 + a_n^2 X_3 + \ldots + a_n^{n-1} X_n = -a_n^n \end{array}$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais distintos.

▶ **Problema 5**

Seja ABC um triângulo. Seja D um ponto entre B e C, seja E um ponto entre C e A, e seja F um ponto entre A e B. Mostre que

$$(S_{\Delta DEF})^3 + (S_{\Delta AEF} + S_{\Delta BFD} + S_{\Delta CDE}) \cdot (S_{\Delta DEF})^2 \geq 4 \cdot S_{\Delta AEF} S_{\Delta BFD} S_{\Delta CDE},$$

e vale a igualdade se, e somente se, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ são concorrentes. Denotamos por $S_{\Delta PQR}$ a área do triângulo PQR.

▶ **Problema 6**

A cada aresta de um poliedro convexo P associamos o inteiro -1. A cada vértice associamos o produto dos números associados às arestas nele incidentes e a cada face associamos o produto dos números associados a seus lados. Se S_P e a soma de todos esses números, prove que:

a. $S_P = 2 - 4k$, tal que $k \geq 4$.

b. Para cada $k \geq 4$, existe um poliedro convexo P tal que $S_P = 2 - 4k$.