I Olimpíada Cearense de Matemática

10 de outubro de 1981

1ª PARTE

Coloque certo (C) ou errado (E) nas proposições abaixo:

01. ( ) O valor da expressão $(-2)^2 + \left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) : \left[(-2)\cdot\frac{5}{48}\right]\right\}$ é igual a 1.

02. ( ) A forma mais simplificada da expressão:

$$(-a-b)^2 + (-a+b)^2 + 2(a-b)(b-a)$$

é $4b^2$.

03. ( ) O valor de a para que as equações: $3x - 12 = 0$ e $ax + a = 15$ tenham a mesma raiz é $a = 2$.

04. ( ) Se $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ representam os conjuntos dos naturais, inteiros, racionais e reais respectivamente, então: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

05. ( ) Se $x = -1$ e $y = 2$ é a solução do sistema $\begin{cases} 2x - y = a \\ 3x + 2y = b \end{cases}$ então $a + b = 1$.

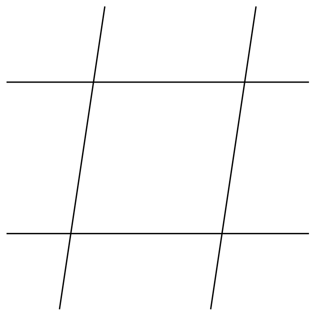
06. ( ) Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

07. ( ) O complemento de $30°$ é $150°$.

08. ( ) Se ABC é um triângulo isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AC}$, então a altura, mediana e bissetriz (que partem do vértice A) são todas iguais.

09. ( ) $\frac{2}{0} = 2$ e $\frac{0}{0} = 1$.

10. ( ) Na figura abaixo, onde duas retas paralelas são transversais a outras duas retas paralelas, as medidas dos ângulos que aparecem podem ser expressos unicamente por dois valores.



2ª PARTE

▸ Problema 1

Encontre dois números a e b entre 0 e 2, de modo que $b - a = \frac{2}{3}$. Tomando os valores encontrados para a e b considere o conjunto $A = \{0, a, b, 2\}$ e determine três subconjuntos de A.

▸ Problema 2

Considere os conjuntos:

$\mathbb{Z} =$ Conjunto dos números inteiros.
$A = \{x : x \in \mathbb{Z}\text{e } 2x - 3 < 7\}$.
$B = \left\{x : x \in \mathbb{Z}\text{e } \frac{x+3}{2} - 1 > 0\right\}$.

Determine os elementos de $A \cap B$ e B^C (aqui o complemento é tomado em relação a $\mathbb{Z}$).

▸ **Problema 3**

Se $x = 5 + 3\sqrt{2}$, encontre y tal que $xy = 1$ e determine $x + 7y$.

▸ **Problema 4**

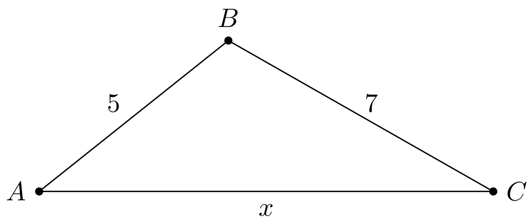
Seja $A = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$.

a) Encontre todos os fatores primos de A;

b) Encontre a maior potência de 10 que divide A, isto é, encontre o maior inteiro positivo α tal que A seja divisível por α.

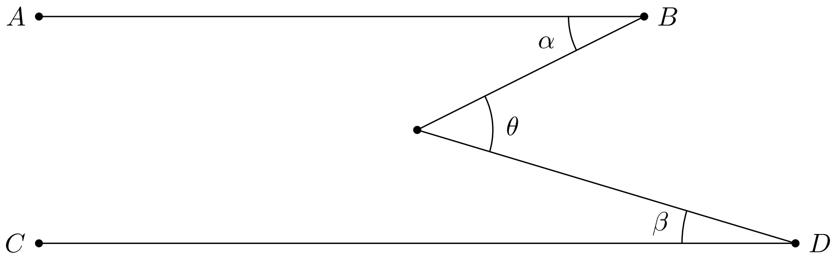
▸ **Problema 5**

Calcule todos os valores inteiros possíveis de x na figura abaixo:



▸ **Problema 6**

Na figura $\overline{AB}//\overline{CD}$. Encontre uma relação entre θ, α e β.

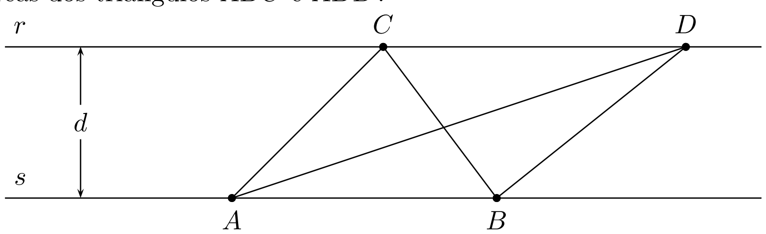


▸ **Problema 7**

Um cavalo e um burro caminhavam juntos, levando sobre os lombos pesadas cargas. Lamentava-se o cavalo de seu revoltante fardo, ao que obtemperou-lhe o burro: De que te queixas? Se eu te tomasse um saco, minha carga passaria a ser o dobro da tua. Por outro lado, se eu te desse um saco, tua carga igualaria a minha! Quantos sacos levava o cavalo, e quantos, o burro?

▸ **Problema 8**

Na figura abaixo as retas r e s que contêm C, D e A, B, respectivamente, são paralelas e estão a uma distância d. Qual a relação entre as áreas dos triângulos ABC e ABD?



▶ **Problema 9**

Num ônibus lotado, estão duas pessoas sentadas em cada banco e há 12 passageiros de pé. Quantas pessoas leva o ônibus, sabendo-se que sentando três pessoas em cada banco não restaria ninguém de pé e ainda ficariam bancos vagos?

▶ **Problema 10**

Seja n um número inteiro positivo. Determine um valor para n de modo que os números: n, $n+2$, $n+3$, $n+4$ e $n+5$ sejam todos compostos (isto é, cada um deles tenha um fator diferente de si e da unidade).

II Olimpíada Cearense de Matemática

16 de outubro de 1982

1ª PARTE

Coloque certo (C) ou errado (E) nas proposições abaixo:

01. ( ) O conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares são disjuntos.

02. ( ) O valor da expressão $3\{-5\cdot(-5)-[-17-4\cdot(-3-18:9)-24:(-3)]-2\}$ é 216.

03. ( ) O número $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$ é irracional.

04. ( ) Dois quadrados são tais que a área de um deles é o dobro da área do outro. Se a diagonal do menor mede $4cm$ então a diagonal do maior mede $8cm$.

05. ( ) O valor de $\sqrt{20}-\sqrt{18}+\sqrt{45}-2\sqrt{50}$ é $8\sqrt{5}-5\sqrt{2}$.

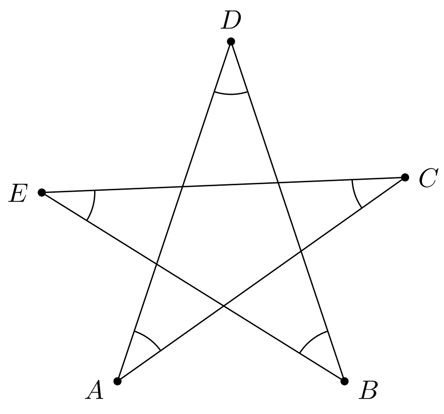
06. ( ) Se $y=x^2-2x+1$ e x_0 é um valor que anula y então x_0 é maior que zero.

07. ( ) Se a diferença entre as medidas de dois ângulos é de $32°$, então a diferença entre as medidas de seus complementos será de $58°$.

08. ( ) O $mdc(12,8)=4$ e o $mmc(6,4)=12$.

09. ( ) A equação $\dfrac{x-4}{10}+\dfrac{x-2}{15}=\dfrac{7}{10}$ tem como raiz $\dfrac{5}{37}$.

10. ( ) Na figura abaixo temos $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}+\widehat{E}=180°$.



2ª PARTE

▶ Problema 1

Duas torres, uma com 30 passos e a outra com 40 passos de altura, estão à distância de 50 passos uma da outra. Entre ambas se acha uma fonte, para a qual dois pássaros descem no mesmo momento do alto das torres com a mesma velocidade e chegam ao mesmo tempo. Qual as distâncias horizontais da fonte às duas torres?

▶ Problema 2

Determine qual é o maior dos dois números $\dfrac{123456+10^{999}}{123457+10^{999}}$ e $\dfrac{123457+10^{999}}{123458+10^{999}}$.

▶ Problema 3

Admita o seguinte resultado: *Todo triângulo é inscritível.* Diga como você encontraria o centro do círculo circunscrito a um triângulo ABC dado.

▸ **Problema 4**

Determinar qual o algarismo final do produto $(156)^8 \cdot (675)^{15}$.

▸ **Problema 5**

Se n é um número inteiro maior do que 2, calcule o valor de

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} \cdots \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$$

3 ª PARTE

Escolha Somente CINCO dos DEZ problemas a seguir

▸ **Problema 1**

Dobra-se um pedaço de arame de $32cm$ de comprimento formando um triângulo isósceles de $12cm$ de base. Calcule a medida do comprimento da bissetriz do ângulo oposto à base.

▸ **Problema 2**

Achar todos os números inteiros de dois algarismos que sejam iguais ao quádruplo da soma dos seus algarismos.

▸ **Problema 3**

Num grupo de 100 pessoas constatou-se que $\frac{4}{5}$ do grupo eram casados. Entre os casados $\frac{3}{5}$ eram homens, $\frac{1}{8}$ eram mulheres com filhos e o restante eram mulheres sem filhos. Quantas mulheres casadas, nesse grupo, não tem filhos?

▸ **Problema 4**

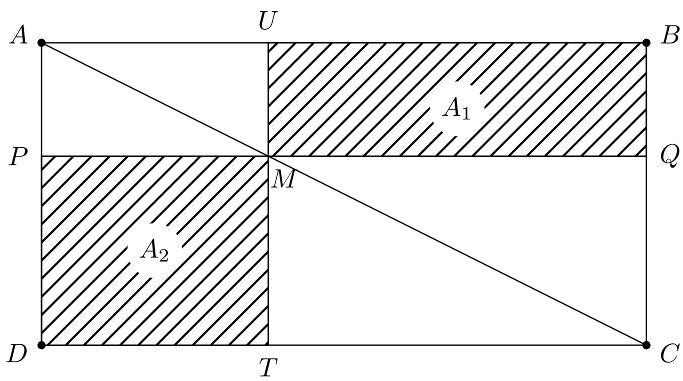
Mostrar que se $a+b+c=0$ então $a^3+b^3+c^3=3abc$.

▸ **Problema 5**

Um professor propõe 80 problemas a um aluno, informando que lhe atribuirá 05 (cinco) pontos por problemas resolvidos (corretamente) e lhe retirará 03 (três) pontos por cada problema não resolvido (incluindo os de solução incorreta). No final o aluno tinha 08 (oito) pontos. Quantos problemas o aluno resolveu corretamente?

▸ **Problema 6**

Consideremos o ponto M da diagonal $\overline{AC}$ do retângulo $ABCD$ e as paralelas $\overline{PQ}$ e $\overline{TU}$ aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, respectivamente, conforme a figura abaixo. A área A_1 é menor, maior ou igual a A_2?



▸ **Problema 7**

Mostre que:
Em um triângulo qualquer, a bissetriz de um ângulo forma com o lado oposto ao ângulo dois ângulos cuja diferença é igual a diferença entre os outros dois ângulos do triângulo.

▸ Problema 8

Uma casa tem três quartos. O piso de um deles tem a forma de um quadrado e os dois outros são de forma retangular cuja largura tem a mesma medida do lado do quadrado e cujos comprimentos medem $5m$ e $4m$. Se os três quartos têm juntos $36m^2$ de área, encontre a área do quarto em forma de quadrado.

▸ Problema 9

Chama-se de apótema de um polígono regular P a distância do centro de P a qualquer um dos seus lados. Prove que a área do polígono regular é igual ao produto do apótema pela metade do perímetro.

▸ Problema 10

Encontre, em cada caso abaixo, o número de retas tangentes comuns a duas circunferências

a) secantes;

b) que não possuem ponto em comum;

c) tangentes.

Faça figura para cada situação.

III Olimpíada Cearense de Matemática

29 de outubro de 1983

1ª PARTE

Coloque certo (C) ou errado (E) nas proposições abaixo:

01. ( ) O par $(0,1)$ é a única solução do sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$.

02. ( ) A área de um círculo de raio $r>0$ é o dobro da área de um círculo de raio $\dfrac{r}{2}$.

03. ( ) O número 2^{1000} é divisível por 4.

04. ( ) Em um triângulo eqüilátero os três lados são iguais, mas os ângulos podem ser diferentes.

05. ( ) A raiz quadrada de um número inteiro positivo não pode ser um número negativo.

06. ( ) O número $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$ é menor que $\sqrt{2}$.

07. ( ) Se o produto de dois números positivos é menor que 1 então estes números são menores que 1.

08. ( ) O quadrado de um número irracional é sempre um número racional.

09. ( ) O número $0,1111\ldots$ é maior que o número $0,112$.

10. ( ) Se x é um número real não nulo tal que $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{x}$, então $x=\pm 1$.

2ª PARTE

▸ Problema 1

Observe que: $\dfrac{1}{9}=0,111111\ldots$, um algarismo se repete; $\dfrac{1}{27}=\dfrac{1}{3}$ de $\dfrac{1}{9}=\dfrac{0,111111\ldots}{3}=0,037037037\ldots$, três algarismos se repetem; $\dfrac{1}{81}=\dfrac{1}{3}$ de $\dfrac{1}{27}=\dfrac{0,037037037\ldots}{3}=0,12345679012345679\ldots$, nove algarismos se repetem. Dê um exemplo de um número racional de tal modo que a parte que se repete tenha 81 algarismos.

▸ Problema 2

Uma observação interessante, que provavelmente seja verdadeira, mas que ninguém até hoje foi capaz de provar, é o seguinte: Todo número par maior que dois é a soma de dois números primos. Por exemplo: $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7$, $12=5+7$, $14=3+11$.
Complete essa lista para todos os números pares menores que 50.

▸ Problema 3

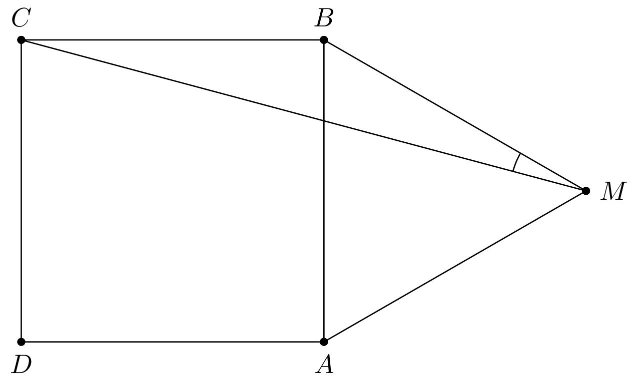
O quadrado de um número inteiro positivo se chama quadrado perfeito. Se x é um quadrado perfeito, determine o próximo quadrado perfeito em ordem crescente.

▸ Problema 4

O número de três dígitos $2a3$ é adicionado ao número 326 para dar o número de três dígitos $5b9$. Se $5b9$ é divisível por 9, calcule $a+b$.

▸ Problema 5

Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado e ABM é um triângulo eqüilátero. Determine a medida do ângulo $B\widehat{M}C$.



▸ **Problema 6**

Qual é o menor inteiro positivo n tal que $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0,01$.

▸ **Problema 7**

Determine o valor de p para que as raízes x_1 e x_2 da equação $2x^2 - px - 1 = 0$ satisfaça a relação $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

▸ **Problema 8**

Seja n um número inteiro positivo:

a) Expresse $\dfrac{1}{n(n+1)}$ como uma soma algébrica de duas frações;

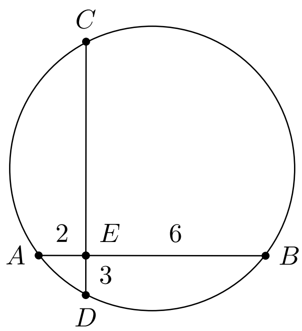
b) Calcule a soma: $S = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$.

▸ **Problema 9**

a) Considere o número irracional $\sqrt{2}$ e seja r um número racional qualquer. Prove que se $r \neq 0$ então $r\sqrt{2}$ é um número irracional (ou equivalentemente: Se $r\sqrt{2}$ é racional, então $r = 0$).
b) Se a, b, c e d são números racionais tais que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, prove que $a = c$ e $b = d$.

▸ **Problema 10**

As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ no círculo abaixo, interceptam-se em E e são perpendiculares. Se os segmentos têm medida $\overline{AE} = 2cm$, $\overline{EB} = 6cm$ e $\overline{ED} = 3cm$, calcule o comprimento do diâmetro do círculo.



IV Olimpíada Cearense de Matemática

27 de outubro de 1984

▶ Problema 1

Sejam a e b números reais, não nulos simultaneamente. Se $x = \dfrac{4a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $y = \dfrac{4b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, calcule o valor de $(x+y)^2 - 2xy$.

▶ Problema 2

Sejam a e b números reais tais que $a \cdot b = 1$. Mostre que o produto $\left(a - \dfrac{1}{a}\right) \cdot \left(b + \dfrac{1}{b}\right)$ é igual a $a^2 - b^2$.

▶ Problema 3

Sejam $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$, $B = \dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ e $C = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ Verifique que $2B = A + C$.

▶ Problema 4

Um homem ao olhar para seu relógio após as $6h$, observou que os ponteiros formavam um ângulo de $110°$. Voltando a consultar seu relógio antes das $7h$, observou que novamente os ponteiros formavam um ângulo de $110°$. Determine o número de minutos que transcorreu entre as duas observações.

▶ Problema 5

Separe os números 1, 2, 3, 4, 5 em dois conjuntos arbitrários. Prove que um destes conjuntos contém dois números e sua diferença.

▶ Problema 6

Três máquinas P, Q e R, trabalhando juntas, podem fazer um trabalho T em x horas. Quando trabalhando sozinha, P necessita de um adicional de 6 horas para realizar o mesmo trabalho, Q um adicional de 1 hora e R x horas adicionais. Determine o valor de x.

▶ Problema 7

Se as diagonais de um quadrilátero (convexo) são perpendiculares, prove que as somas dos quadrados dos lados opostos são iguais.

▶ Problema 8

Para numerar as páginas de um livro foram empregados 10681 algarismos. Determinar quantas páginas tem o livro.

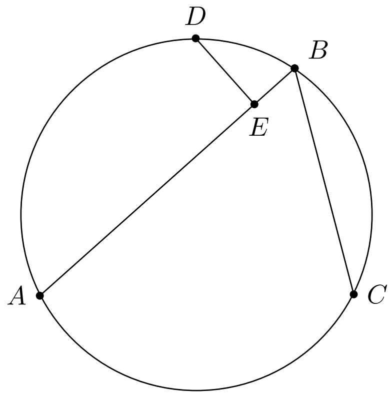
▶ Problema 9

Determine o menor número inteiro positivo n, que ao ser dividido por 10 deixa resto 9, ao ser dividido por 9 deixa resto 8, ao ser dividido por 8 deixa resto 7, etc, e ao ser dividido por 2 deixa resto 1.

▶ Problema 10

Na circunferência abaixo, D é o ponto médio do arco $\overset{\frown}{AC}$. Se B é um ponto do arco $\overset{\frown}{DC}$ e $\overline{DE}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, mostre que

$$\overline{AE} = \overline{EB} + \overline{BC}.$$



V Olimpíada Cearense de Matemática

26 de outubro de 1985

▶ Problema 1

Os estudantes de uma escola organizaram uma quermesse para conseguir dinheiro para a festa de formatura. Estabeleceram a seguinte norma: "cada pessoa, ao visitar uma barraca, gasta a metade do que tem no bolso mais $Cr\$30,00$". Marta visitou a barraca de pescaria, depois foi a barraca do tiro ao alvo e em seguida a barraca das argolas. Ao sair da barraca das argolas Marta ainda tinha $Cr\$120,00$. Quanto tinha Marta ao entrar na barraca da pescaria?

▶ Problema 2

Um estudante ao efetuar a multiplicação de 432 por um certo número obteve o número 16416, por ter trocado, por engano, o algarismo das dezenas do multiplicador, tomando 3 em vez de 7. Encontre o verdadeiro produto.

▶ Problema 3

Encontre o quociente da divisão de $a^{128} - b^{128}$ por

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})(a^{64}+b^{64}).$$

▶ Problema 4

Em 1982 o número que expressava a população da cidade de Asa Branca era um quadrado perfeito. No ano seguinte a população aumentou 99 pessoas e continuou a ser um quadrado perfeito. Em 1984, a população do ano anterior cresceu em 101 pessoas e continuou sendo um quadrado perfeito. Determine a população de Asa Branca em 1982.

▶ Problema 5

Um observador estando a $25m$ de um prédio o visualiza sob um certo ângulo. Afastando-se, na direção perpendicular ao prédio mais $50m$ o ângulo de visualização é a metade do anterior. Qual a altura do prédio?

▶ Problema 6

Determine todos os pares de algarismos (x, y) de modo que o número (de cinco dígitos) $75x4y$ seja divisível por 5 e por 9.

▶ Problema 7

Os pontos A_1, A_2, A_3, A_4, distintos, dividem a circunferência C em quatro arcos $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, $\overset{\frown}{A_3A_4}$ e $\overset{\frown}{A_4A_5}$. Mostre que dois dos segmentos de retas que unem os pontos médios destes arcos se interceptam perpendicularmente.

VI Olimpíada Cearense de Matemática

25 de outubro de 1986

▸ Problema 1

Determine o conjunto A tal que $\{(1,-2),(3,0)\} \subset A \times A$ e $A \times A$ tem exatamente 16 elementos. Justifique sua resposta.

▸ Problema 2

Determine o menor número inteiro positivo que admita 12 divisores positivos e tenha somente 3, 5 e 7 como fatores primos.

▸ Problema 3

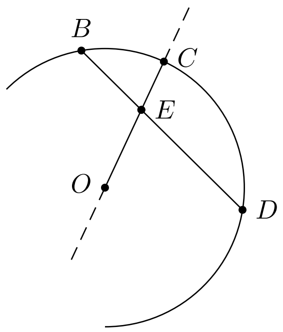
Resolva a equação $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9} = 3$.

▸ Problema 4

Se a é um número inteiro positivo qualquer, mostre que a fração $\dfrac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ é irredutível.

▸ Problema 5

Seja BED uma corda de um círculo com centro em O e tal que $\overline{BE} = 3cm$ e $\overline{ED} = 5cm$. A reta determinada por O e E intercepta o círculo no ponto C. Determine o raio do círculo, sabendo-se que $\overline{EC} = 1cm$.



▸ Problema 6

Entre todos os triângulos isósceles, cujos lados de mesmo comprimento medem a, determine a base daquele cuja área é máxima.

▸ Problema 7

Sejam x, y números reais quaisquer e n um número inteiro positivo também qualquer.

a) Verifique:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

b) Use o item anterior para mostrar que:

$1^n + 8^n - 3^n - 6^n$ é divisível por 2 e por 5 e, portanto, por 10.

VII Olimpíada Cearense de Matemática

31 de outubro de 1987

▶ Problema 1

O comandante de um batalhão tenta dispor sua tropa em um quadrado cheio, com os homens colocados em filas paralelas aos lados e igualmente espaçados. Depois de um primeiro arranjo, sobram-lhe 326 homens. Em seguida, experimenta colocar mais 3 homens em cada fila, mas para completar o quadrado faltam-lhe 253 homens. Qual o número total dos integrantes do seu contingente?

▶ Problema 2

Seja n um número inteiro e positivo qualquer tal que o algarismo das unidades é 7. Justifique por que n não é um quadrado perfeito.

▶ Problema 3

Um grupo de garotos, colegas do mesmo bairro, resolveu se reunir para comprar uma bola no valor de $Cz\$1.260,00$ com participação igual de todos. Após o acordo, dois garotos não puderam contribuir, forçando um aumento de $Cz\$15,00$ na cota de cada um dos demais. Quantos garotos compunham o grupo inicial?

▶ Problema 4

Determine o valor de p, maior que um, de modo que p, $p+2$ e $p+4$ sejam números primos positivos. Mostre que o valor de p é único.

▶ Problema 5

Se as raízes da equação $x^2+px+q=0$ são positivas, mostre que o mesmo ocorre com as raízes da equação $q\cdot y^2+(p-2rq)y+1-pr=0$, onde r é um número positivo.

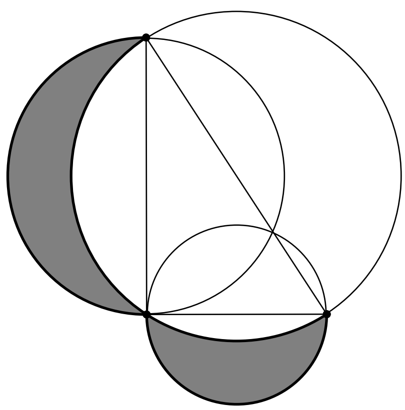
▶ Problema 6

Seja ABC um triângulo cuja medida dos lados são números inteiros consecutivos é tal que o maior ângulo $\widehat{A}$ é o dobro do menor ângulo. Determine a medida dos lados deste triângulo.

Sugestão: Se D é o ponto do lado $\overline{BC}$, determinado pela bissetriz do ângulo $\widehat{A}$, então $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$.

▶ Problema 7

Em um triângulo cujos lados medem $3m$, $4m$ e $5m$, respectivamente, construímos sobre cada um dos lados um círculo cujo diâmetro é o lado considerado (e o centro é o ponto médio deste lado), conforme figura abaixo. Determine a área da região hachurada.



VIII Olimpíada Cearense de Matemática

18 de junho de 1988

▶ Problema 1

Um cidadão tem sete amigos. O primeiro vem visitá-lo toda tarde; o segundo, a cada duas tardes; o terceiro, a cada três tardes; o quarto, a cada quatro tardes e assim sucessivamente até o sétimo, que vem a cada sete tardes. Na tarde do dia 31 de dezembro de 1987 coincidiu que o anfitrião se encontrou com todos os seus sete amigos e aproveitando a ocasião combinaram que no próximo encontro, de todos eles, haveria uma confraternização. Qual a data desta festa?

▶ Problema 2

As raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ são R e S. Determine a equação do 2º grau cujas raízes são $aR + b$ e $aS + b$.

▶ Problema 3

Quando Pascal nasceu, Descartes tinha 27 anos, e quando Descartes morreu, Pascal tinha 27 anos. Pascal morreu aos 39 anos. A soma dos anos das mortes de ambos é igual ao primeiro número par maior que 3300 e que seja divisível por 9. Determine os anos de nascimentos e de morte de cada um deles.

▶ Problema 4

Determine (se existirem) todos os números inteiros positivos n de modo que a fração $\dfrac{2n+3}{5n+7}$ seja redutível.

▶ Problema 5

Num triângulo ABC as medianas relativas aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares. Se $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ medem $7cm$ e $6cm$, respectivamente, determine o comprimento do lado $\overline{AB}$.

▶ Problema 6

Um estudante gastou certa quantidade em dinheiro para comprar uma caneta, uma lapiseira e um livro. Se a caneta, a lapiseira e o livro custassem 5, 2 e $2,5$ vezes mais barato, respectivamente, a compra custaria $Cz\$800,00$. Se, em comparação com o preço original, a caneta custasse 2 vezes mais barato, a lapiseira 4 vezes e o livro 3 vezes mais barato, pelos mesmos objetos o aluno pagaria $Cz\$1.200,00$.

a) Qual o valor total da compra?

b) Quem tem o preço maior? A caneta ou a lapiseira?

▶ Problema 7

Seja P um ponto interior a um triângulo ABC e d_1, d_2 e d_3, respectivamente, as distâncias de P aos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ do triângulo dado. Se h_1, h_2 e h_3 são, respectivamente, as alturas relativas aos vértices A, B e C, prove que

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} = 1.$$

IX Olimpíada Cearense de Matemática

1989

▸ Problema 1

Para um grupo de crianças formado de 5 meninos e 5 meninas, as seguintes afirmações são verdadeiras:

1) as crianças de cabelos longos não gostam de bombom;
2) não há meninas com cabelos curtos;
3) o número de meninas que não gostam de bombom é igual ao número de meninos com cabelos longos.

Quantos meninos (se existirem) gostam de bombom?

▸ Problema 2

Eduardo possui uma pequena biblioteca, onde guarda seus livros. Após uma ampliação, o número total de livros da biblioteca não passou de 50. Sabe-se que exatamente 20% dos livros da nova biblioteca são didáticos e que exatamente $\frac{1}{7}$ do total são paradidáticos. Quantos livros têm a biblioteca (ampliada) de Eduardo?

▸ Problema 3

Para fazer uma unidade do brinquedo "Alfa" são necessários um certo número de peças, todas elas com um preço inferior a um (1) cruzado novo. Um comprador foi informado pela vendedora de uma loja que todas as peças tem preços iguais e que a quantidade de peças para fabricar o brinquedo é igual ao número que expressa, em centavos, o preço de cada peça. Para pagar a compra a vendedora recebeu uma cédula de $NCz\$10,00$ e deu de troco uma cédula de 1 cruzado novo e mais seis moedas, de modo que o troco foi inferior a 2 cruzados novos. Qual o valor da maior das seis moedas?
Obs.: Admita que existam somente moedas de: 1, 5, 10, 20 e 50 centavos de cruzado novo.

▸ Problema 4

Perguntaram a um homem de 59 anos, quais as idades de seus filhos. Ele respondeu: a idade de um deles é igual a três vezes a soma dos dígitos de sua idade mais 1 e a idade de cada um dos outros é igual a três vezes a soma dos dígitos de cada idade mais 3. Quantos filhos tem o homem e quais suas idades? Justifique.

▸ Problema 5

Duas tangentes $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são traçadas a um círculo de um ponto externo O. Uma corda $\overline{AC}$ é construída paralela a $\overline{OB}$ e uma secante $\overline{OC}$ é desenhada interceptando o círculo em E. Se K é o ponto de interseção de $\overline{OB}$ com o prolongamento de $\overline{AE}$, prove que $\overline{OK} = \overline{KB}$.

▸ Problema 6

Sejam $x = abcd$ e $y = dabc$ dois números de quatro dígitos com $y \leq x$ e tais que se somarmos x e y ainda obtemos um número $z = \alpha 179$ de quatro dígitos. Determine o número x.

▸ Problema 7

Determine a soma e o produto das raízes reais da equação

$$x^2 + 18x + 30 = \sqrt{x^2 + 18x + 45}.$$

X Olimpíada Cearense de Matemática

09 de junho de 1990

Problema 1

a) Prove que se $\frac{a}{b} > 1$, então $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

b) Qual das frações é maior $\frac{2753}{2235}$ ou $\frac{2743}{2225}$? Justifique (sem efetuar as divisões).

Problema 2

Um lavrador vendeu 30 quilos de cereais (feijão e arroz) por $CR\$1.890,00$. O preço total do feijão foi o mesmo que o preço total do arroz, e o preço de cada quilo de feijão excedeu em $CR\$60,00$ o preço de cada quilo de arroz. Quantos quilos de cada cereal vendeu e quais os preços de venda do quilo de cada um dos cereais?

Problema 3

A pesquisa realizada com as crianças de um conjunto habitacional, que apurou as preferências em relação aos três programas de televisão: *Alegre Amanhã* (designado por A), *Brincolândia* (designado por B) e *Criança Feliz* (designado por C) indicou os seguintes resultados:

PROGRAMA	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C	NENHUM
Nº DE CRIANÇAS QUE APRECIAM	100	150	200	20	30	40	10	130

Pergunta-se:

a) Quantas crianças foram consultadas?

b) Quantas crianças apreciam apenas um programa?

c) Quantas crianças apreciam mais de um programa?

Problema 4

Sejam ABC um triângulo qualquer e a, b, e c os lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. Mostre que $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$ se, e somente se, o ângulo $\widehat{A}$ é o dobro do ângulo $\widehat{B}$.

Problema 5

Considere os números obtidos repetindo-se sucessivamente 1988, isto é: 1988; 19881988; 198819881988; etc. Em que passo aparece pela primeira vez, um múltiplo de 126?

Problema 6

Com o centro em cada um dos vértices de um hexágono regular, traçam-se circunferências de raio igual ao lado do hexágono. Determine a área da rosácea formada pelas partes comuns a estes círculos.

Problema 7

a) Mostre que, para todo inteiro n, $n^5 - n$ é divisível por 5.

b) Mostre que, para todo inteiro n, $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ é um número inteiro.

XI Olimpíada Cearense de Matemática

10 de agosto de 1991

▶ Problema 1

Sejam a_1, a_2, a_3 números quaisquer, um dos quais é a média aritmética dos outros dois. Mostre que a média aritmética dos 3 números dados é igual a um deles.

▶ Problema 2

Determine todos os pares de números a e b tais que $mdc(a, b) = 12$ e $mmc(a, b) = 432$, simultaneamente.

▶ Problema 3

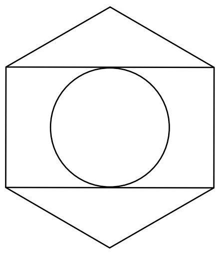
Considere as afirmações abaixo, admitindo-as verdadeiras:
∘ Todo funcionário público é administrador.
∘ Alguns economistas são funcionários públicos.
∘ Quem administra não trabalha com computador.
∘ Alguns engenheiros não trabalham com computador.
Verifique e justifique (usando diagrama com conjunto) a validade ou não das seguintes conclusões:

a) Os sócios, engenheiro Bruno e economista Marcondes, não podem ser funcionários públicos.

b) O engenheiro Marcos e a economista Ana podem ser programadores da TECSOFT.

▶ Problema 4

Determine a área compreendida no interior do hexágono regular, de lado medindo $10cm$, e que é externa ao círculo.



▶ Problema 5

Seja H a altura relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo inscrito em um círculo de raio $2R$. Determine os lados do triângulo em função de R e H.

▶ Problema 6

Determine:

a) As soluções inteiras positivas a, b, c da equação

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

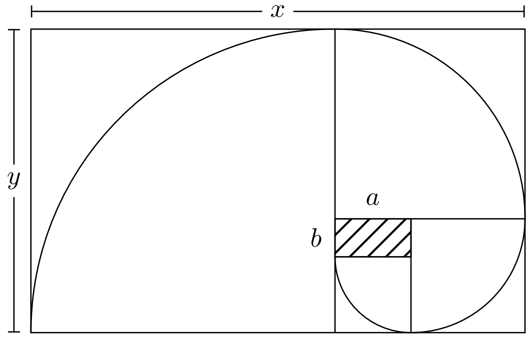
b) As soluções inteiras positivas x, y, z da equação

$$xyz = x + y + z.$$

c) Os triângulos com lados de medida inteira, cujo círculo inscrito tem raio igual a 1.

▶ Problema 7

Na figura abaixo, cada arco é um quarto de circunferência centrada no vértice de um quadrado. O retângulo que limita a figura (lados x e y) e o retângulo de área hachurada (lados a e b) são tais que $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b} = k$ (constante). Mostre que os números x e y não são simultaneamente inteiros.
Sugestão: determine o valor de k.


x
y
a
b

XII Olimpíada Cearense de Matemática

1992

▶ **Problema 1**

Os números 18 e 50 pertencem a um conjunto X de números inteiros com 30 elementos. A média de todos os elementos de X é igual a 20. Se retirarmos de X os dois números acima, determine a média dos elementos restantes.

▶ **Problema 2**

Determine todos os valores reais de x, y e z que satisfazem a igualdade

$$3x^2 + y^2 + z^2 = 2xy + 2xz.$$

▶ **Problema 3**

Seja A um conjunto de números inteiros de quatro algarismos entre 5000 e 10000 que tem a forma *abba*. Por exemplo, 6666 e 8448 são elementos de A. Determine o número de elementos de A.

▶ **Problema 4**

Dê condições sobre o parâmetro real a para que qualquer solução x da desigualdade $a \cdot x^2 + (1 - a^2) \cdot x - a > 0$ satisfaça $-2 \leq x \leq 2$.

▶ **Problema 5**

Num baú existem 238 moedas, apenas uma delas falsa e as demais verdadeiras, e cada uma das verdadeiras com o mesmo peso. Usando apenas uma balança de dois pratos (sem pesos) e cinco pesagens, descreva o processo para identificar a moeda falsa, sabendo que ela é mais leve do que as verdadeiras.

▶ **Problema 6**

Se $p > 3$ é um número primo e os três números p, $p + q$ e $p + 2q$ são todos primos, prove que q é divisível por 6.

▶ **Problema 7**

Considere duas circunferências C_1 e C_2 de raios R e r $(R > r)$, tangentes externamente. As retas t e s tangenciam simultaneamente C_1 e C_2 nos pontos A, B, C e D e formam um ângulo de $60°$. Mostre que se $r = \sqrt{3}cm$, a medida, em cm, do perímetro do trapézio $ABCD$ é um número inteiro.

XIII Olimpíada Cearense de Matemática

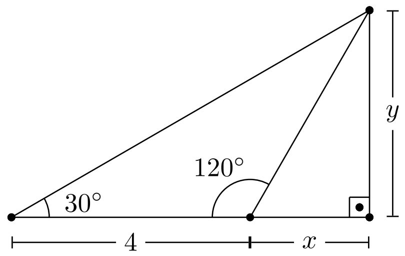
1993

▸ **Problema 1**

Uma pessoa sabe de um segredo e passa para 12 pessoas. Cada uma destas 12 pessoas passa o segredo para outras 12 pessoas. Novamente cada um dos novos conhecedores do segredo passa para outras 12 pessoas. No final do processo quantas pessoas sabiam do segredo?

▸ **Problema 2**

Na figura determine $(x+y)^2$.



▸ **Problema 3**

Numa circunferência marca-se, seguindo a ordenação usual dos números naturais, 30 pontos distintos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{30}$ de modo que os arcos ligando dois pontos consecutivos são todos iguais. Determine qual dos pontos acima é diametralmente oposto ao ponto A_7, isto é, a corda ligando o ponto a ser encontrado e A_7 é um diâmetro da circunferência.

▸ **Problema 4**

Considere duas urnas A e B, onde A contém 1000 bolas (inicialmente todas vermelhas) e B contém 5000 bolas (inicialmente todas brancas).
Atente para o seguinte procedimento interativo:

1º passo: Retira-se 100 bolas de B e coloca-se em A, passando A a contar com 1100 bolas e B com 4900 bolas. Em seguida, aleatoriamente, retiram-se 100 bolas de A e repõe-se em B, restabelecendo os números iniciais de 1000 bolas em A e 5000 bolas em B.

2º passo: Depois de executado o 1º passo, torna-se a retirar 100 bolas de B, aleatoriamente, e coloca-se em A. Em seguida retira-se 100 bolas de A, aleatoriamente, e devolve-se a B, novamente estabelecendo os números de 1000 bolas na urna A e 5000 bolas na urna B; e assim sucessivamente.

Após 5 passos, qual das conclusões é verdadeira?

a) Existem mais bolas brancas em A do que bolas vermelhas em B.

b) O número de bolas brancas em A é o mesmo de bolas vermelhas em B.

c) Existem mais bolas vermelhas em B do que bolas brancas em A.

Justifique sua conclusão.

▸ **Problema 5**

Considere as funções quadráticas reais $f(x) = 2x^2 + 5x + c$ e $g(x) = 2x^2 + 5x + d$. Determine a área localizada entre os gráficos de f e g no trecho de $x = n$ até $x = m$, $m > n$.

▸ **Problema 6**

Seja n um número natural. Faça o que está solicitado em cada item:

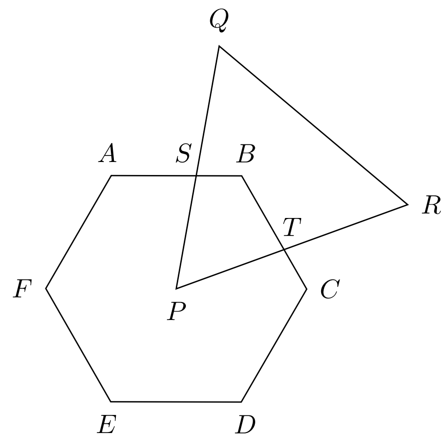
a) Mostre que $3n + 1$ e $4n + 1$ são números primos entre si.

b) Mostre que, se k e j são números naturais primos entre si tais que $k \cdot j = n^2$, para algum n, então k e j são quadrados perfeitos.

c) Determine o menor valor de n de modo que o produto $(3n+1)(4n+1)$ seja um quadrado perfeito.

▶ **Problema 7**

Na figura abaixo $ABCDEF$ é um hexágono regular é PQR é um triângulo eqüilátero, $\overline{AB} = 3$ e $\overline{PQ} = 5$. Determine a área interna ao triângulo eqüilátero que é externa ao hexágono.
Obs.: P é o centro do círculo circunscrito ao hexágono.



XIV Olimpíada Cearense de Matemática

11 de junho de 1994

▶ Problema 1

Três meninos têm em conjunto 21 garrafas de Coca-cola, todas elas com a mesma capacidade. Sabe-se que sete garrafas estão vazias; outras sete contêm exatamente a metade de sua capacidade e as restantes estão totalmente cheias. Apresente duas maneiras de dividir as 21 garrafas entre os três meninos, sem transferir coca de uma para outra e de modo que cada um deles leve o mesmo número de garrafas e a mesma quantidade de Coca-cola.

▶ Problema 2

Seja $A = 777\ldots77$ um número onde o dígito "7" aparece 1001 vezes. Determine o quociente e o resto da divisão de A por 1001.

▶ Problema 3

Se p e $8p-1$ são números primos, prove que $8p+1$ é um número composto, isto é, não é primo.

▶ Problema 4

Se K, L e M são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC de área S, mostre que o triângulo KLM tem área igual a $\dfrac{S}{4}$.

▶ Problema 5

Determine x e y na equação $(360+3x)^2 = 492y04$, sabendo-se que eles são positivos e o dígito y é tal que $0 \leq y \leq 9$.

▶ Problema 6

Seja ABC um triângulo com lados a, b, c tais que $c < b < a$. Considere o trinômio do $2^{\underline{o}}$ grau

$$y = x^2 + 2(b+c-a)\cdot x + b^2 + c^2 - a^2.$$

a) Mostre que $y = 0$ possui duas raízes reais e distintas.

b) Seja $r = a - b - c + \sqrt{2(a-b)(a-c)}$. Mostre que, se $r < 0$, o ângulo $\widehat{A}$ é agudo e, se $r = 0$, então $\widehat{A} = 90°$.

▶ Problema 7

Dois números num mesmo sistema de numeração desconhecido são escritos na forma 504 e 304. O produto deles é representado por 106100 no sistema de base 9. Determine a base do primeiro sistema.

XV Olimpíada Cearense de Matemática

26 de agosto de 1995

▸ Problema 1

Um número é chamado *capícua* quando se pode escrevê-lo do mesmo modo da direita para a esquerda e da esquerda para a direita (por exemplo: 34043, 1221, etc.). Determine a quantidade de números capícua existente entre 10 e 1000.

▸ Problema 2

Mariana tem numa jaula coelhos, coelhas e coelhinhos, em quantidades que são expressas por três números inteiros consecutivos, tais que o quadrado de sua soma é igual à soma dos seus cubos. Determine a quantidade total de animais existentes na jaula.

▸ Problema 3

a) Se um trapézio é inscritível numa circunferência prove que ele é isósceles.

b) Se um trapézio é isósceles prove que ele é inscritível numa circunferência.

▸ Problema 4

Determine todos os pares de inteiros (x, y) que satisfazem a equação

$$x^2 + x + 1995 = y^2 + y.$$

▸ Problema 5

As retas r, s e t são paralelas. A reta s está situada entre r e t de tal modo que a distância de s a t é $1m$. Calcule a área de um triângulo eqüilátero onde os vértices se encontram sobre cada uma das três retas.

▸ Problema 6

Sejam ABC um triângulo qualquer e P o ponto de encontro de suas medianas. Veja que uma reta r qualquer que passe pelo ponto P, excetuando-se as medianas, separa um dos vértices do triângulo, por exemplo A, dos outros dois B e C. Prove que a soma das distâncias de B e C à reta r é igual a distância de A à reta r.

▸ Problema 7

Prove que o número $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$ é divisível por 5.

XVI Olimpíada Cearense de Matemática

31 de agosto de 1996

▸ Problema 1

No País do triângulo, escreve-se os números 14 e 123 como indicados nas figuras A e B, respectivamente.

a) Encontre o número representado pela figura C? Justifique.

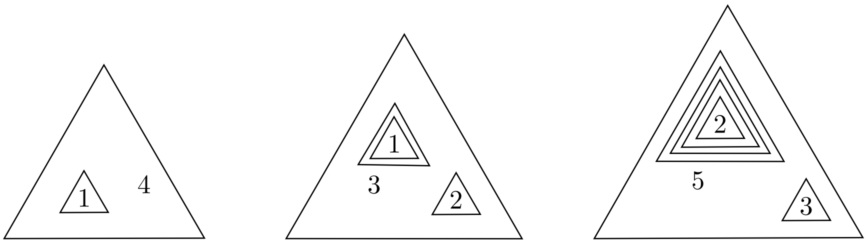


Figura A Figura B Figura C

b) Faça a figura que representa o número 1.020.301.

▸ Problema 2

Seja b um número real não nulo de modo que a equação do 2º grau $x^2 + b^2x + \sqrt{\pi} = 0$ tenha raízes reais x_1 e x_2. Se $x_1\sqrt{\pi} = x_2(bx_2 - \sqrt{\pi})$, prove que o número b é negativo.

▸ Problema 3

Numa corrida de motocicleta se inscreveram 9 corredores. O que tinha o número 1 não pôde correr; os outros chegaram ao final da corrida. A soma dos números dos três primeiros é igual à soma dos últimos. Dos três ganhadores, o que tem o número mais alto chegou em terceiro lugar e o segundo tem o número seguinte ao do vencedor. Quais os números dos corredores que chegaram nos três primeiros lugares?

▸ Problema 4

Um triângulo ABC é tal que $\widehat{C} = 2\widehat{A}$ e $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{BC}$. Prove que este triângulo é retângulo.

▸ Problema 5

Para levar ao aeroporto um contingente de 90 turistas somente pode-se usar veículos com capacidade para 6 ou 8 passageiros, sem incluir o motorista. Esses veículos trafegam obrigatoriamente com lotação completa. A viagem de cada grupo no primeiro tipo de condução custa $R\$30,00$ e no segundo $R\$36,00$. Decide-se distribuir os passageiros de modo que o gasto total com o translado seja mínimo. Determine esse mínimo.

▸ Problema 6

Considere a seqüência de números e retângulos abaixo, que será objeto de um jogo.

$$\Box\ 1\ \Box\ 2\ \Box\ 3\ \Box\ 4\ \Box\ 5\ \Box\ 6\ \Box\ 7\ \Box\ 8$$

Em cada jogada, temos que colocar um dos sinais "+" ou "−" em cada retângulo desocupado. Quando os oito retângulos estão ocupados, efetua-se a soma algébrica que ficou indicada e com isso o jogo termina. O jogo começa pelo jogador A. O jogador B somente ganha se o resultado final for -4, -2, 0, $+2$, $+4$ (nos demais casos o jogador A é o ganhador). Existe uma estratégia que garante sempre a vitória de um mesmo jogador independentemente do modo de jogar do outro. Qual é essa estratégia e qual o jogador que sempre ganha?

XVII Olimpíada Cearense de Matemática

30 de agosto de 1997

▸ **Problema 1**

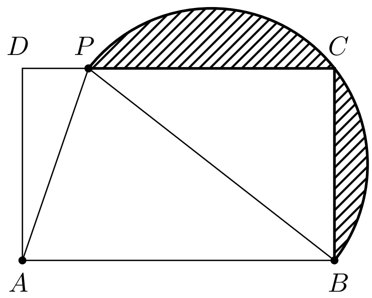
Sejam a, b, c, números reais positivos distintos dois a dois tais que $a^2+b^2-ab=c^2$. Prove que o produto $(a-c)(b-c)$ é negativo.

▸ **Problema 2**

Considere o conjunto $\{4, 8, 9, 16, 27, 32, 64, 81, 243\}$. Determine o número total de valores distintos que se pode obter multiplicando-se dois elementos distintos deste conjunto.

▸ **Problema 3**

Sejam $ABCD$ um retângulo, P um ponto de $\overline{DC}$, $\overline{PB}=\overline{AB}$ e o arco PCB uma semicircunferência. Sabendo-se que a área do triângulo PCB é igual a 4 vezes a área do triângulo APD e a área do triângulo APB é $4,8dm^2$, determine o perímetro do contorno da região hachurada.



▸ **Problema 4**

Um palhaço equilibrista comprou 10 conjuntos de pratos, cada um deles contendo 10 pratos. O peso de cada prato, a princípio é de $200g$. Todos os pratos devem pesar igualmente, pois caso contrário, o palhaço não poderia fazer seu número de equilibrismo. Alguém informa ao palhaço que um dos conjuntos de 10 pratos foi vendido errado, pois os pratos deste conjunto pesam $150g$. O palhaço pode utilizar uma balança que fornece o peso exato, mas essa balança só funciona com ficha e ele tem dinheiro apenas para uma pesagem. Como ele descobre o conjunto mais leve?

▸ **Problema 5**

Seja a um número inteiro positivo ímpar. Determine a de modo que a equação $x^2-ax+4a=0$ tenha as duas raízes inteiras.

▸ **Problema 6**

Se $x^2+x+1=0$, calcule o valor numérico de

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2+\cdots+\left(x^{27}+\frac{1}{x^{27}}\right)^2.$$

XVIII Olimpíada Cearense de Matemática

29 de agosto de 1998

▸ **Problema 1**

Encontre duas frações com numeradores inteiros positivos e denominadores 7 e 9 de tal modo que a soma delas seja $\frac{73}{63}$.

▸ **Problema 2**

Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ as bases de um trapézio tal que a base menor $\overline{CD}$ é igual à soma dos lados não paralelos do trapézio. Se E é um ponto de $\overline{CD}$ e $\overline{EA}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{A}$, mostre que $\overline{EB}$ é também bissetriz do ângulo $\widehat{B}$.

▸ **Problema 3**

Prove que não existem inteiros positivos a e b tais que $\dfrac{a^2+a}{b^2+b} = 4$.

▸ **Problema 4**

Determine todos os inteiros positivos N de três dígitos tais que N e a soma dos seus dígitos seja divisível por 11.

▸ **Problema 5**

Um polígono de 1998 lados está inscrito numa circunferência e tem seus vértices denominados por $A_1, A_2, \ldots, A_{1998}$. Calcule a soma dos ângulos: $A_2 + A_4 + A_6 + \cdots + A_{1998}$.

▸ **Problema 6**

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ inteiros positivos e $p_1, p_2, \ldots, p_{13}$ números primos. Sabe-se que

$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 & = & p_1 \\ a_2 + a_3 & = & p_2 \\ a_3 + a_4 & = & p_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{13} + a_1 & = & p_{13} \end{array}$$

Encontre o valor do menor elemento dos conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{13}\}$ e $B = \{p_1, p_2, \ldots, p_{13}\}$.

XIX Olimpíada Cearense de Matemática

1999

▶ Problema 1

Na equação $x^2 - px + q = 0$ os números p e q são inteiros positivos.

a) Mostre que se essa equação tem duas raízes reais e iguais, então p é par.

b) Em que situação essa equação não possui raízes reais e iguais? Justifique.

▶ Problema 2

Azambuja escreveu $\square 4 \square 1 \square 6 \square 3 \square$ no quadro de sua sala de aula. Disse para seus colegas que eles dispunham dos algarismos 9, 8 e 5 para colocar dois deles em dois quadrados vazios, apagar os quadrados não preenchidos e assim obter um número de seis algarismos diferentes. Quais algarismos devem ser escolhidos e onde colocá-los para formar o maior número possível que seja divisível por 6?

▶ Problema 3

Achar todos os conjuntos de quatro inteiros consecutivos tais que o maior desses inteiros divida o *mmc* (mínimo múltiplo comum) dos outros três.

▶ Problema 4

Se p e $8p^2 + 1$ são números primos positivos, prove que $p = 3$.

▶ Problema 5

Seja n um inteiro positivo e $\theta(n)$ a soma de todos os divisores positivos de n. Prove que $\theta(n) + \theta(n+1) > \dfrac{5n}{2}$.

▶ Problema 6

Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ duas retas paralelas cortadas por uma transversal nos pontos E e F, respectivamente. As linhas $\overline{EM}$ e $\overline{EN}$ tricectam o ângulo $F\widehat{E}B$ e as retas $\overline{FL}$ e $\overline{FO}$ tricectam o ângulo $E\widehat{F}D$, com $F\widehat{E}M < F\widehat{E}N$ e $E\widehat{F}L < E\widehat{F}O$. Seja P a interseção de $\overline{EM}$ e $\overline{FL}$ e Q a intersecção de $\overline{EN}$ e $\overline{FO}$. Através de P desenhe a reta paralela a $\overline{FQ}$ cortando $\overline{EQ}$ em G e a linha paralela a $\overline{EQ}$ cortando $\overline{FQ}$ em H. A linha $\overline{GH}$ corta $\overline{AB}$ em J e $\overline{CD}$ em K. Mostre que $\overline{JG} = \overline{GH} = \overline{HK}$.

XX Olimpíada Cearense de Matemática

2000

▸ Problema 1

Quatro jovens, Paulo, Rodrigo, André e Tiago foram juntos para uma loja de departamentos e cada um comprou somente um objeto. Um deles comprou um relógio, outro um livro, outro um par de sapatos e outro uma máquina fotográfica. Estes objetos encontravam-se no primeiro, segundo, terceiro e quarto andares, mas não necessariamente nessa ordem e cada objeto era vendido somente em um dos quatro andares. Com base nas pistas seguintes, determine o objeto que cada um comprou e em que andar foi realizada a compra. Justifique sua resposta.

Pista 1: Rodrigo foi somente para o primeiro andar;
Pista 2: Relógios eram vendidos somente no quarto andar;
Pista 3: Tiago foi somente para o segundo andar;
Pista 4: Paulo comprou um livro;
Pista 5: Rodrigo não comprou uma máquina de fotografia.

▸ Problema 2

Cinqüenta bolas, numeradas de 2 a 51, devem ser colocadas em 5 caixas, de modo que o máximo divisor comum (mdc) dos números de duas bolas quaisquer de uma caixa não seja o número correspondente a uma bola desta caixa. Quais são as bolas de cada uma das 5 caixas? Justifique.

▸ Problema 3

Uma turma de trabalhadores rurais, todos com a mesma capacidade de trabalho, deverá roçar duas áreas, com o mesmo tipo de vegetação, em que uma delas é o dobro da outra. Durante metade de um dia, a turma completa trabalhou na roça de área maior. Na outra metade desse dia, metade da turma passou para a roça de área menor e a outra metade continuou na roça maior. No final de um dia de trabalho, o serviço estava feito, com exceção de uma pequena porção da roça menor. A roçagem desta porção ocupou todo o dia seguinte de um dos trabalhadores da turma. Quantos trabalhadores havia na terra?

▸ Problema 4

Encontre as soluções inteiras da equação $y^2 - 3 = x(3y - 6)$.

▸ Problema 5

Sabendo-se que existe um hexágono convexo de área máxima inscrito numa circunferência, prove que esse hexágono é regular.

▸ Problema 6

Um banqueiro prometeu a um estudante do ensino fundamental um prêmio em cédulas de 1, 10 e 50 reais. O estudante deverá escolher a quantidade de cédulas de cada valor, respeitando as seguintes condições:

a) O número total de cédulas do premio é 100;

b) Qualquer grupo de 100 cédulas escolhidas deverá conter pelo menos uma cédula de cada valor;

c) A quantia total, em reais, deverá poder ser formada de pelo menos duas maneiras distintas. Por exemplo, $R\$1.355,00$ pode ser obtido com 45 cédulas de $R\$1,00$, 36 de $R\$10,00$ e 19 de $R\$50,00$ ou 5 cédulas de $R\$1,00$, 85 de $R\$10,00$ e 10 de $R\$50,00$.

Sabe-se que o estudante recebeu a quantia máxima possível. Qual o valor que ele recebeu?

XXI Olimpíada Cearense de Matemática

25 de agosto de 2001

▶ **Problema 1**

O número a é média aritmética de três números, e b é média aritmética de seus quadrados. Expresse a média aritmética de seus produtos dois a dois em termos de a e b.
(Obs: A média aritmética dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é definido como: $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$)

▶ **Problema 2**

Um comerciante possui para vender 2001 bilas (bolas de gude) e deseja distribuí-las em 11 sacos a serem lacrados, de modo que o primeiro cliente que queira comprar bilas possa ser atendido sem que seja necessário abrir nenhum dos sacos lacrados, bastando apenas levar os sacos de bilas apropriados. Como fazer a distribuição das bilas nos sacos se o primeiro cliente pode pedir qualquer quantidade de bilas menor ou igual a 2001?

▶ **Problema 3**

Achar todos os números x, y tais que $(1-x)^2 + (x-y)^2 + y^2 = \dfrac{1}{3}$.

▶ **Problema 4**

Demonstre que a bissetriz do ângulo reto de um triângulo é também bissetriz do ângulo formado pela altura e pela mediana relativa à hipotenusa deste triângulo.

▶ **Problema 5**

No país da verdade, onde ninguém mente, reuniram-se os amigos Marcondes, Francisco e Fernando. Entre os três ocorreu a seguinte conversa:
–*Marcondes:* estou escolhendo dois inteiros positivos e consecutivos e vou dar um deles ao Francisco e outro ao Fernando, sem que vocês saibam quem recebeu o maior;
Após receber cada um o seu número, Francisco e Fernando continuaram a conversação.
–*Francisco:* não sei o número que Fernando recebeu;
–*Fernando:* não sei o número que Francisco recebeu;
–*Francisco:* não sei o número que Fernando recebeu;
–*Fernando:* não sei o número que Francisco recebeu;
–*Francisco:* não sei o número que Fernando recebeu;
–*Fernando:* não sei o número que Francisco recebeu;
–*Francisco: agora eu sei* o número que o Fernando recebeu;
–*Fernando:* agora eu também sei o número que Francisco recebeu;
Quais os números recebidos por cada um deles?

▶ **Problema 6**

Sejam P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 trinômios do segundo grau tais que cada número $1, 2, 3, \ldots, 21$ é raiz de, pelo menos, uma equação $P_i(x) = P_j(x)$, com $1 \leq i \leq 5$. Mostre que entre os cinco trinômios acima existem, pelo menos, dois iguais.

XXII Olimpíada Cearense de Matemática

01 de setembro de 2002

▸ Problema 1

Encontre todas as raízes reais da equação

$$\sqrt{\frac{x^2-2x-2}{x^2+4x+2}}+\sqrt{\frac{x^2+4x+2}{x^2-2x-2}}=2.$$

▸ Problema 2

Um quadrado é dividido em quatro triângulos retângulos congruentes e um quadrado menor, conforme a figura 1. Esses quatro triângulos e o quadrado menor são rearranjados da forma indicada na figura 2. O matemático indiano Bhaskara demonstrava o teorema de Pitágoras com a ajuda desses diagramas. Obtenha, a partir das figuras abaixo, uma demonstração do teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados dos seus catetos.

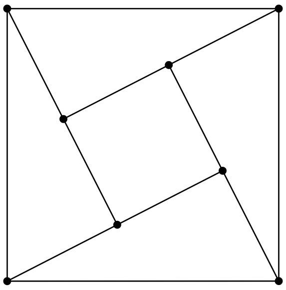


Figura 1

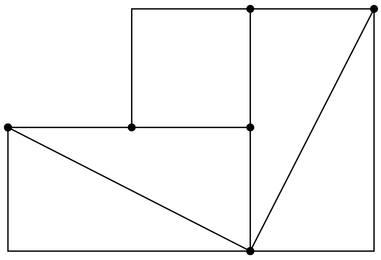


Figura 2

▸ Problema 3

Dois recipientes iguais estão cheios de álcool. Do primeiro recipiente retira-se A litros de álcool e coloca-se a mesma quantidade de água. Em seguida, da mistura obtida de álcool e água se retira A litros e coloca-se a mesma quantidade de água. Do segundo recipiente retira-se $2A$ litros e se enche com a mesma quantidade de água. Determinar que parte do volume do recipiente constitui A litros se a concentração final da mistura no primeiro recipiente é $\frac{25}{16}$ vezes maior que a concentração final da mistura no segundo recipiente.
Notação: Denotamos por *concentração de uma mistura de álcool e água* a proporção entre o volume de álcool na mistura e o volume total da mistura.

▸ Problema 4

O professor Marcondes propôs a dois de seus alunos, Fernando e Francisco, a seguinte tarefa: eles devem escolher um número n e, sem revelá-lo a Marcondes, Francisco deve tomar n e escrever de todas as formas possíveis a fração $\frac{1}{n}$ como soma de duas frações positivas $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, com x e y números inteiros, não importando a ordem das parcelas, isto é, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$ são consideradas a mesma resposta e somente uma delas deve ser escrita. Fernando, por sua vez, deve tomar n e escrever a fração $\frac{1}{n}$ como diferença de duas frações positivas $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, com x e y inteiros. Após Francisco e Fernando terminarem suas contas, eles disseram a Marcondes que o total de soluções obtidas pelos dois foi 78. Marcondes então afirmou, sem conferir os cálculos, que um dos alunos errou. Explicar o fato, já que Marcondes desconhecia o número n escolhido.

▸ Problema 5

Um viajante toma um trem às 7 horas da manhã na cidade A e chega à cidade B às 7 horas da noite do mesmo dia. Uma semana depois, ele deixa a cidade B às 7 horas da manhã tomando a mesma linha, chegando à cidade A às 7 horas da noite desse dia. O trem desenvolve velocidade variável tanto na ida quanto na volta e faz o percurso entre a cidade B e a cidade A pelos mesmos trilhos. Mostre que existe um ponto entre A e B no qual o viajante passa no mesmo horário na ida e na volta.

▶ **Problema 6**

Um mágico resolveu exibir seus poderes encontrando, dentre 21 moedas de aparência semelhante, uma moeda falsa, mais leve que as demais, que tinham o mesmo peso. Ele dispôs as moedas em 3 pilhas de 7 moedas cada, denominadas P_1^1, P_2^1 e P_3^1. Ele então comparou os pesos de P_1^1 e P_2^1 numa balança de pratos que indica o maior dentre os pesos comparados. As próximas pesagens foram assim realizadas: ele desmanchava as pilhas P_1^k, P_2^k e P_3^k da pesagem anterior para obter 3 novas pilhas de 7 moedas cada denotadas por P_1^{k+1}, P_2^{k+1} e P_3^{k+1}. A seguir, ele comparava os pesos de P_1^{k+1} e P_2^{k+1} na balança de pratos. Um espectador observou que o mágico seguia sempre os mesmos procedimentos: após a k-ésima pesagem, ele desmanchava uma pilha por vez, de cima para baixo, retirando as moedas uma a uma, e as colocava imediatamente em alguma das pilhas P_1^{k+1}, P_2^{k+1} ou P_3^{k+1} da pesagem subseqüente. Ele se lembra também que sempre que 3 moedas ocupavam posições consecutivas numa mesma pilha P_1^k, P_2^k ou P_3^k elas ocupariam pilhas diferentes na próxima pesagem. Ele não lembra a ordem em que as pilhas eram desfeitas. Sabendo que o mágico não tinha poderes sobrenaturais, qual o procedimento que ele utilizou para realizar a sua mágica com a quantidade mínima de pesagens?

XXIII Olimpíada Cearense de Matemática

22 de setembro de 2003

▸ Problema 1

Simplifique a expressão $\sqrt{9-6a+a^2}+\sqrt{9+6a+a^2}$, sabendo que $a<-3$.

▸ Problema 2

Escreva a dízima $0,23200320032003\ldots$ como fração $\dfrac{p}{q}$, em que p e q são primos entre si.

▸ Problema 3

Mostre que a diferença entre um número racional, suposto diferente de zero e um, e seu inverso, nunca é um número inteiro.

▸ Problema 4

Seja P um ponto no interior de um hexágono regular com lados de comprimento um. Os segmentos que unem P a dois vértices têm comprimento $13/12$ e $5/12$, respectivamente. Determine os comprimentos dos segmentos unindo P aos outros vértices do hexágono.

▸ Problema 5

Se subtraírmos da minha idade atual a razão entre a idade atual do meu pai e a minha idade hoje, obteremos a idade que eu tinha quando meu pai tinha 6 vezes a minha idade. Sabendo que meu avô paterno não conhecia a minha avó paterna durante a segunda guerra mundial (1939 a 1945), quantos anos tenho hoje?

▸ Problema 6

Tendo encontrado os pares ordenados (m,n) dispostos como abaixo,

$$
\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \arrow[r] & (1,4) \arrow[dl] & \cdots & (1,10000) \\
(2,1) \arrow[d] & (2,2) \arrow[ur] & (2,3) \arrow[dl] & (2,4) \arrow[ur] & \cdots & (2,10000) \\
(3,1) \arrow[ur] & (3,2) \arrow[dl] & (3,3) \arrow[ur] & (3,4) & \cdots & (3,10000) \\
(4,1) \arrow[d] & (4,2) \arrow[ur] & (4,3) & (4,4) & \cdots & (4,10000) \\
\vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(10000,1) & (10000,2) & (10000,3) & (10000,4) & \cdots & (10000,10000)
\end{tikzcd}
$$

Pedro os rearranjou numa seqüência $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, etc., seguindo a ordem das setas esboçadas na figura. Qual será o par ordenado a ocupar a $2003^{\underline{a}}$ posição na seqüência? Exemplo: $(1,1)$ ocupa a primeira posição, enquanto que $(1,3)$ ocupa a sexta posição na seqüência.

XXIV Olimpíada Cearense de Matemática

26 de setembro de 2004

▶ **Problema 1**

Um estudante resolve colar seus selos num álbum. Se prega 20 selos em cada folha, o álbum não terá folhas suficientes para receber todos os selos. Se prega 23 selos, sobrará pelo menos uma folha vazia no álbum. Se o aluno receber outro álbum idêntico, com 21 selos em cada folha, ficará com um total de 500 selos. Quantas folhas tem o álbum?

▶ **Problema 2**

Qual o menor inteiro positivo com o mesmo número de divisores de 2004?

▶ **Problema 3**

Sejam a, b, c três inteiros positivos tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Mostre que um deles é múltiplo de 4.

▶ **Problema 4**

São dados no plano uma reta r e um ponto $A \notin r$ e a distância de A a r é igual a $3\,cm$. Determine, com prova, o menor comprimento possível de um segmento $\overline{BC}$, com $B, C \in r$ e tais que $B\hat{A}C = 120°$.

▶ **Problema 5**

Mostre que existe um triângulo ABC com elementos α, h_b, w_c, onde α h_b é o comprimento da altura baixada do vértice B e w_c é o comprimento da bissetriz do ângulo com vértice c, se e somente se,

$$a \geq h_b, \;\; w_c^2 < 2a(a + \sqrt{a^2 - h_b^2}).$$

▶ **Problema 6**

Separamos o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2 \ldots\}$ como união disjunta $\mathbb{N} = L \cap (\mathbb{N} - L)$. O conjunto L é finito, tem g elementos e se os números naturais a, b são tais que $a \notin L$, $b \notin L$, então $a + b \notin L$. Mostre que o maior número de elementos de L é menor ou igual a $2g - 1$.