I Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Uruguai, 1988

Primeiro dia

1. Dois triângulos isósceles cujos lados medem x, x, a e x, x, b, respectivamente, têm área igual; $a \neq b$. Encontre x.

2. Encontre a soma $1 + 11 + 111 + 111...111$, que tem n parcelas.

3. Um número p se diz perfeito se a soma de seus divisores, exceto o próprio p, dá como resultado p. Seja f uma função tal que:

$f(n) = 0$ se n é perfeito

$f(n) = 0$ se o dígito das unidades de n é 4

$f(a.b) = f(a) + f(b)$

Calcular $f(1988)$.

Segundo dia

4. Considera-se um número n de quatro dígitos, quadrado perfeito, tal que todos seus dígitos são menores que 6. Se a cada dígito lhe é somado 1, o número resultante é outro quadrado perfeito. Encontre n.

5. No quadrado $ABCD$ consideram-se as diagonais AC e BD. Seja P um ponto qualquer pertencente a um dos lados. Demonstrar que a soma das distâncias de P às duas diagonais é constante.

6. Demonstrar que reduzindo as dimensões de um tijolo não se pode obter um outro que tenha, ao mesmo tempo, a metade do volume e a metade da superfície do primeiro.

II Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Argentina, 1991

Primeiro dia

1. Sejam A, B e C três pontos não colineares (não alinhados) e E ($\neq B$) um ponto qualquer que não pertença à reta AC. Construa os paralelogramos $ABCD$ (nesta ordem) e $AECF$ (também nesta ordem). Demonstre que $BE//DF$.

2. Duas pessoas A e B jogam o seguinte jogo: A começa escolhendo um número natural e logo, cada jogador na sua vez, diz um número de acordo com a seguinte regra:

* se o último número dito for ímpar, o jogador soma 7 a este número;

* se o último número dito for par, o jogador o divide por 2.

Ganha o jogador que repete o número que for escolhido inicialmente. Encontrar todos os números que A pode escolher para ganhar.

Justifique a sua resposta.

3. Sabe-se que o número de soluções reais do seguinte sistema é finito. Prove que este sistema tem um número par de soluções:

$(y^2 + 6)(x - 1) = y(x^2 + 1)$

$(x^2 + 6)(y - 1) = x(y^2 + 1)$

Segundo dia

4.

5.

6.