Olimpíadas do Cone Sul V a XII

Provas gentilmente cedidas por Antônio Caminha Muniz Neto

V Cone Sul - Uruguai - 1994

Problema 1. *O inteiro positivo* n *tem* 1994 *algarismos. Desses,* 14 *são iguais a* 0 *e as quantidades de vezes que os algarismos* $1, 2, 3, 4,\ 5, 6, 7, 8, 9$ *aparecem são respectivamente proporcionais a* $1, 2,\ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. *Mostre que* n *não pode ser um quadrado perfeito.*

Problema 2. *Considera-se uma circunferência* C*, de diâmetro* $AB = 1$*. Toma-se um ponto* P_0 *qualquer de* C*, distinto de* A*, e a partir dele constrói-se uma seqüência* $P_0, P_1, P_2, \ldots$ *de pontos de* C *do seguinte modo:* Q_n *é o simétrico de* A *em relação a* P_n *e a reta contendo* B *e* Q_n *intersecta* C *em* B *e* P_{n+1} *(não necessariamente distintos). Mostre que é possível escolhermos* P_0 *de modo que as duas condições a seguir sejam satisfeitas:*

(*a*) $P_0\widehat{A}B < 1^\circ$.

(*b*) *Existam inteiros* $0 \leq r < s$ *tais que o triângulo* AP_rP_s *seja equilátero.*

Problema 3. *Seja* a *um real positivo dado. Determine o valor mínimo possível de* $x^3 + y^3$*, onde* x *e* y *são reais positivos tais que* $xy(x + y) = a$.

Problema 4. *Pedro e Cecília participam de um jogo com as seguintes regras*: *Pedro escolhe um inteiro positivo* a *e Cecília ganha dele se puder encontrar um inteiro positivo* b*, primo com* a *e tal que a decomposição em fatores primos de* $a^3 + b^3$ *contenha ao menos três primos distintos. Mostre que Cecília sempre pode ganhar.*

Problema 5. *Ache infinitos ternos* (x, y, z) *de inteiros, com* x *e* y *relativamente primos e tais que* $x^2 + y^2 = 2z^2$.

Problema 6. *Seja* ABC *um triângulo retângulo em* C*. Sobre o lado* AB *tomamos um ponto* D *de modo que* $CD = k$ *e os raios das circunferências inscritas nos triângulos* ACD *e* BCD *sejam iguais. Mostre que* $A(ABC) = k^2$.

VI Cone Sul - Bolívia - 1995

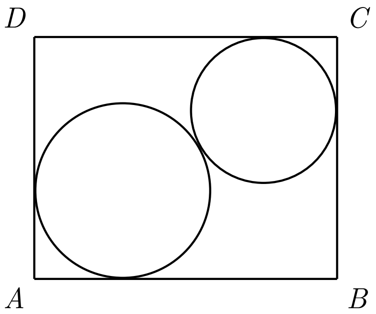
Problema 1. *Ache um número de três algarismos, sabendo que a soma dos mesmos é* 9*, o produto é* 24 *e o número, quando lido da direita para a esquerda, é igual a* 27/38 *do número original.*

Problema 2. *Há dez pontos marcados sobre uma circunferência, numerados de* 1 *a* 10 *em alguma ordem. Traçamos em seguida todos os segmentos que esses pontos determinam e os pintamos, uns de vermelho e os demais de azul. É possível, sem trocar as cores dos segmentos, reenumerar os pontos de* 1 *a* 10 *de modo que se dois números eram unidos por um segmento vermelho agora o sejam por um segmento azul e vice-versa?*

Problema 3. *Seja $ABCD$ um retângulo cujos lados medem $AB = a$ e $BC = b$. Dentro do retângulo traçamos duas circunferências tangentes exteriormente, de modo que uma delas tangencia os lados AB e AD, ao passo que a outra tangencia os lados BC e CD do retângulo.*

(a) *Calcule, em função de a e b, a distância entre os centros das circunferências.*

(b) *Fazendo variar os raios das circunferências de modo que a situação de tangência se mantenha, determine o lugar geométrico descrito pelo ponto de tangência das circunferências.*



Problema 4. *Escrevemos os algarismos de* 1995 *do seguinte modo:*

$$1995119999551119999999555\ldots$$

(a) *Quantos algarismos devem ser escritos para que a soma dos mesmos seja* 2880?

(b) *Que algarismo aparece na posição* 1995 *a partir da esquerda?*

Problema 5. *Uma semi-circunferência de centro O e diâmetro AC é dividida em dois arcos AB e BC, na razão $1 : 3$. Sejam M o ponto médio do raio OC e T o ponto do arco menor BC para o qual a área do quadrilátero $OBTM$ é a maior possível. Calcule essa área em função do raio da semi-circunferência.*

Problema 6. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f(n) = 2n - 1995\lfloor n/1000 \rfloor$.*

(a) *Mostre que, se existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(r)}(n) = 1995$ então n é um múltiplo de 1995.*

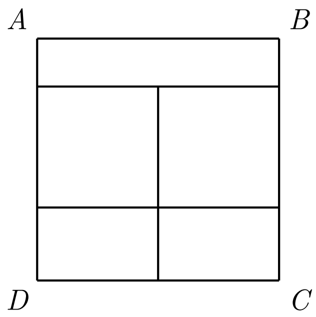
(b) *Mostre que se n for múltiplo de 1995 então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(r)}(n) = 1995$.*

(c) *Determine r se $n = 1995 \cdot 500$.*

(*aqui, $f^{(r)}$ significa a composta de f consigo mesma, r vezes*).

VII Cone Sul - Peru - 1996

Problema 1. *Na figura a seguir, o quadrado maior está dividido em dois quadrados e três retângulos, conforme mostrado:*



A área de cada um dos dois quadrados menores é igual a a e a área de cada um dos dois retângulos menores é igual a b. Se $a + b = 24$ e a raiz quadrada de a é um número natural, ache todos os possíveis valores para a área do quadrado maior.

Problema 2. *Considere a sequência de números reais positivos $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida por*

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$$

para todo inteiro $n \geq 0$. Mostre que, a despeito do valor de a_0, sempre se tem $a_{1996} > 63$.

Problema 3. *Uma loja vende garrafas com uma das seguintes capacidades: $1l, 2l, 3l, \ldots, 1996l$. Os preços das garrafas satisfazem as seguintes condições:*

- *Duas garrafas têm um mesmo preço se e só se suas capacidades $m > n$ são tais que $m - n = 1000$.*
- *Cada garrafa de m litros $(1 \leq m \leq 1000)$ custa $1996 - m$ reais.*

Determine todos os pares de capacidades (m, n) das garrafas satisfazendo as seguintes condições:

- $m + n = 1996$.
- *O custo total do par seja o menor possível.*
- *Com um tal par possamos medir k litros, para cada inteiro k desde* 1 *até* 1996.

(*As operações permitidas são: encher ou secar qualquer das garrafas; passar líquido de uma garrafa para outra. Teremos conseguido medir k litros quando a quantidade de litros em uma garrafa, mais a quantidade de litros na outra, for igual a k*).

Problema 4. *A seqüência $0, 1, 1, 1, \ldots, 1$ contém 1996 números, sendo o primeiro igual a 0 e todos os demais iguais a 1. Escolhemos dois ou mais números da seqüência (mas não toda ela), e substituímos cada um desses números pela média aritmética dos números escolhidos, obtendo-se assim uma nova seqüência de 1996 números. Mostrar que existe uma seqüência dessas operações que nos permite obter uma seqüência com 1996 números iguais.*

Problema 5. *Pretendemos cobrir totalmente um quadrado de lado k ($k > 1$ inteiro) com os seguintes retângulos: 1 retângulo 1×1, 2 retângulos 2×1, 4 retângulos 3×1, ..., 2^n retângulos $(n+1) \times 1$, de maneira que os retângulos não se superponham nem excedam os limites do quadrado. Ache todos os valores de k para os quais isto é possível e, para cada um de tais valores, desenhe uma solução.*

Problema 6. *Achar todos os inteiros $n > 2$ para os quais existe um conjunto S_n formado por n pontos do plano satisfazendo as seguintes condições:*

(a) *Três pontos quaisquer não são colineares.*

(b) *Nenhum ponto é interior a qualquer círculo que tenha por diâmetro dois dos pontos de S_n.*

VIII Cone Sul - Paraguai - 1997

Problema 1. *De cada inteiro positivo n menor que 100, subtraímos a soma dos quadrados de seus algarismos. Para que valores de n essa diferença é a maior possível?*

Problema 2. *Seja C uma circunferência de centro O, AB um diâmetro de C e R um ponto qualquer em C, distinto de A e de B. Seja P a interseção da perpendicular traçada por O a AR com AR. Sobre a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ se situa Q, de maneira que QP é a metade de OP e Q não pertençe ao segmento OP. Por Q traçamos a paralela a AB, que intersecta AR em T. Chamemos H a interseção das retas AQ e OT. Prove que os pontos H, R e B são colineares.*

Problema 3. *Mostre que existem infinitos ternos (a, b, c) de números naturais tais que*

$$2a^2 + 3b^2 - 5c^2 = 1997.$$

Problema 4. *Considere um tabuleiro com n linhas e 4 colunas. Escreva na primeira linha 4 zeros, um em cada casa. Em seguida, cada linha é obtida a partir da linha anterior, realizando a seguinte operação: em uma das casas da nova linha, à sua escolha, escrevemos o mesmo número da casa imediatamente acima, na linha anterior; nas outras casas pomos 1 se a casa correspondente da linha acima tiver 0, 2 se a casa acima tiver 1 e 0 se tiver 2. Construa o maior tabuleiro possível com todas as linhas diferentes, e mostre que é impossível termos um tabuleiro maior com tal propriedade.*

Problema 5. *Seja $n > 3$ natural. Mostre que, entre os múltiplos de 9 menores que 10^n, há mais números com soma dos algarismos igual a $9(n-2)$ que números com soma dos algarismos igual a $9(n-1)$.*

Problema 6. *Considere um triângulo acutângulo ABC e seja X um ponto no plano do triângulo. Sejam M, N e P as projeções ortogonais de X sobre as retas que contêm as alturas de ABC. Determine todos os X para os quais os triângulos MNP e ABC são congruentes.*

IX Cone Sul - Brasil - 1998

Problema 1. *São dados 98 cartões. Em cada um deles está escrito um dos números $1, 2, 3, \ldots, 98$ (não existem números repetidos). Pede-se ordenar os 98 cartões de modo que, ao considerarmos dois cartões consecutivos, a diferença entre os números neles escritos seja, em valor absoluto, sempre maior que 48. Indicar de quantas formas distintas é possível fazer tal ordenação.*

Problema 2. *Sejam H o ortocentro e M o ponto médio do lado BC do triângulo acutângulo ABC. O ponto X é o ponto em que a reta HM intersecta o arco BC, da circunferência circunscrita ao triângulo, que não contém A. Seja Y o ponto de interseção da reta BH com tal circunferência, $Y \neq B$. Mostre que $XY = BC$.*

Problema 3. *Prove que para ao menos 30% dos naturais de 1 a 1000000 o primeiro algarismo de 2^n é igual a 1.*

Problema 4. *Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos os $x, y \in \mathbb{R}$, tenhamos*

$$f(x^2) - f(y^2) + 2x + 1 = f(x+y)f(x-y).$$

Problema 5. *Em Terra Brasilis existem n casas, onde vivem n duendes, cada um em uma casa. Nesse país temos estradas de mão única satisfazendo as seguintes condições:*

- *Cada estrada une duas casas.*
- *Em cada casa começa exatamente uma estrada.*
- *Em cada casa termina exatamente uma estrada.*

Todos os dias, a partir do dia 1*, cada duende sai da casa onde está e chega à casa vizinha. Uma lenda de Terra Brasilis diz que, quando todos os duendes regressarem às suas casas originais, o mundo acabará.*

(a) *Mostre que o mundo acabará.*

(b) *Se* $n = 98$*, mostre que é possível que os duendes construam e orientem as estradas de modo que o mundo não acabe antes de* 300000 *anos.*

Problema 6. *O prefeito de uma cidade deseja estabelecer um sistema de transportes com pelo menos* 1 *linha de ônibus, no qual:*

(a) *Cada linha passe por exatamente* 3 *paradas.*

(b) *Cada duas linhas distintas tenham exatamente uma parada em comum.*

(c) *Para cada duas paradas distintas exista exatamente uma linha que passe por ambas.*

Determine o número de paradas de ônibus da cidade.

X Cone Sul - Argentina - 1999

Problema 1. *Determine o menor inteiro positivo* n *de modo que as* 73 *frações a seguir sejam irredutíveis:*

$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \ldots, \frac{91}{n+93}.$$

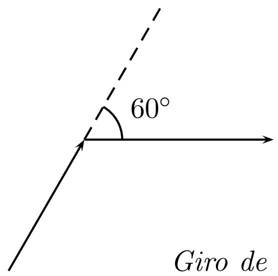
Problema 2. *Seja* ABC *um triângulo retângulo em* A*. Construa o ponto* P*, sobre a hipotenusa* BC*, tal que se* Q *for o pé da perpendicular traçada desde* P *até o cateto* AC*, então a área do quadrado de lado* PQ *é igual a área do retângulo de lados* PB *e* PC*. Mostre os passos da construção.*

Problema 3. *Há* 1999 *bolinhas em uma reta; algumas são vermelhas e as demais são azuis (poderiam ser todas vermelhas ou todas azuis). Debaixo de cada bolinha escrevemos um número inteiro, igual à soma da quantidade de bolinhas vermelhas à direita dela, mais a quantidade de bolinhas azuis à esquerda dela. Se, na seqüência de números assim obtida, houver exatamente três números que aparecem uma quantidade ímpar de vezes, quais poderiam ser tais números?*

Problema 4. *Seja* A *um número de seis algarismos, três dos quais estão coloridos e são iguais a* $1, 2$ *e* 4*. Suponha ainda que* 7 *não divide* A*. É permitido ou apagar esses três algarismos ou permutar todos os algarismos de* A *como queiramos. Mostre que de uma dessas formas podemos sempre obter um número múltiplo de* 7*.*

Problema 5. *É dado um quadrado de lado* 1*. Mostre que, para cada conjunto finito de pontos no perímetro do quadrado, podemos achar um vértice do mesmo com a seguinte propriedade: a média aritmética dos quadrados das distâncias de tal vértice aos pontos do conjunto é maior ou igual a* $3/4$*.*

Problema 6. *Uma formiga caminha pelo piso de um pátio circular de raio* r*. A formiga avança em linha reta, às vezes parando. Quando ela pára, antes de voltar a caminhar gira a direção de caminhada de* $60°$*, alternando o sentido: se da última vez ela girou horariamente, da próxima girará anti-horariamente, e vice-versa. Ache o maior comprimento possível do caminho percorrido pela formiga.*



Giro de $60°$ *à direita.*

XI Cone Sul - Uruguai - 2000

Problema 1. *Dizemos que um número é descendente se cada um de seus algarismos for menor ou igual que o algarismo anterior, da esquerda para a direita. Por exemplo,* 433 *e* 751 *são descendentes, enquanto* 476 *e* 455 *não são descendentes. Determine se existem inteiros positivos* n *para os quais o número* 16^n *seja descendente.*

Problema 2. *Em um tabuleiro* 8×8 *distribuímos os inteiros de* 1 *a* 64*, um em cada casa. A seguir, colocamos sobre o tabuleiro fichas quadradas* 2×2*, que cobrem exatamente quatro casas cada (sem superposição) e de modo que os quatro números cobertos por cada ficha têm soma menor que* 100*. Mostre uma distribuição desses inteiros que permita colocar o maior número possível de fichas no tabuleiro e demonstre que não é possível obter uma distribuição que permita colocar mais fichas.*

Problema 3. *Um quadrado de lado* 2 *é dividido em retângulos mediante várias retas paralelas aos lados (algumas horizontais e outras verticais). Os retângulos são coloridos alternadamente de branco e preto, como em um tabuleiro de xadrez. Se deste modo a área branca resultou igual à área preta, mostre que ao recortar os retângulos pretos ao longo de seus bordos é possível formar com os mesmos (sem superposição) um retângulo preto* 1×2*.*

Problema 4. *Sejam* $ABCD$ *um quadrado (os vértices estão nomeados no sentido horário) e* P *um ponto qualquer pertencente ao interior do segmento* BC*. Constrói-se o quadrado* $APRS$

(*os vértices novamente nomeados no sentido horário*). *Demonstrar que a reta CR é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo* ABC.

Problema 5. *No plano cartesiano considere os pontos de coordenadas inteiras. Uma operação consiste em escolher um destes pontos e realizar uma rotação de* $90°$, *no sentido anti-horário, com centro no ponto escolhido. É possível, através de uma sequência dessas operações, levar o triângulo de vértices* $(0,0)$, $(1,0)$ *e* $(0,1)$ *no triângulo de vértices* $(0,0)$, $(1,0)$ *e* $(1,1)$*?*

Problema 6. *Existe um inteiro positivo divisível pelo produto de seus algarismos e tal que esse produto seja maior que* 10^{2000}*?*

XII Cone Sul - Chile - 2001

Problema 1. *Em cada casa de um tabuleiro quadriculado* 2000×2000 *deve-se escrever um dos números* $-1, 0, 1$. *Em seguida somam-se os números escritos em cada linha e em cada coluna, obtendo* 4000 *resultados. Mostre que é possível preencher o tabuleiro de modo que os* 4000 *resultados assim obtidos sejam todos distintos.*

Problema 2. *Temos uma sucessão* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *de números inteiros positivos tais que* $a_1 = 1$, $a_{2001} = 200$ *e, para todo inteiro positivo* n,

(*a*) $a_{3n+1} = 2a_n + 1$.

(*b*) $a_{n+1} \geq a_n$.

Calcule o valor de a_{1000}.

Problema 3. *Três triângulos acutângulos estão inscritos em uma mesma circunferência, de modo que seus vértices são nove pontos distintos. Demonstre que se pode escolher um vértice de cada triângulo de maneira que os três pontos escolhidos determinem um triângulo cujos ângulos sejam menores ou iguais a* $90°$.

Problema 4. *Um polígono de área* S *está contido no interior de um quadrado de lado* a. *Demonstre que há pelo menos dois pontos do polígono que estão separados por uma distância maior ou igual a* S/a.

Problema 5. *5 Ache todos os números inteiros positivos* m *tais que*

$$m + 2001S(m) = 2m,$$

onde $S(m)$ *representa a soma dos algarismos de* m.

Problema 6. *Seja* g *uma função definida para todo inteiro positivo* n *e satisfazendo* (*a*) $g(1) = 1$.

(*b*) $g(n+1) = g(n) + 1$ *ou* $g(n+1) = g(n) - 1$ *para todo* $n \geq 1$.

(*c*) $g(3n) = g(n)$ *para todo* $n \geq 1$.

(*d*) $g(k) = 2001$ *para algum inteiro positivo* k.

Ache o menor valor possível de k *dentre todas as funções* g *que cumpram as condições anteriores e demonstre que este valor achado é de fato o menor possível.*

Provas gentilmente cedidas por Antônio Caminha Muniz Neto.