XVIII Olimpíada do Cone Sul
Atlântida, Uruguai
Segundo dia, 15 de junho de 2007

Duração da prova: 4 **horas**

PROBLEMA 1

Considere um tabuleiro 2007×2007. São pintadas algumas casas do tabuleiro. Dizemos que o tabuleiro é *charrúa* se nenhuma linha está totalmente pintada e nenhuma coluna está totalmente pintada.

(a) Qual é o número máximo k de casas pintadas que um tabuleiro charrúa pode ter?

(b) Para tal número k, calcular o número de tabuleiros charrúas distintos que existem.

PROBLEMA 2

Seja $ABCDE$ um pentágono convexo que satisfaz as seguintes condições:

- Existe uma circunferência Γ tangente a cada um de seus lados.
- As medidas de todos os seus lados são números inteiros.
- Ao menos um dos lados do pentágono mede 1.
- O lado AB mede 2.

Seja P o ponto de tangência de Γ com o lado AB.

(a) Determinar as medidas dos segmentos AP e BP.

(b) Dar um exemplo de um pentágono que satisfaz as condições estabelecidas.

PROBLEMA 3

Demonstrar que, para cada inteiro positivo n, existe um inteiro positivo k tal que a representação decimal de cada um dos números $k, 2k, \ldots, nk$ contém todos os dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.