Lista das Férias IV

Nível 2

Samuel Barbosa

Problema 1. *Uma semi-circunferência de centro O e diâmetro AC é dividida em dois arcos AB e BC, na razão $1:3$. Sejam M o ponto médio do raio OC e T o ponto do arco menor BC para o qual a área do quadrilátero $OBTM$ é a maior possível. Calcule essa área em função do raio da semi-circunferência.*

Problema 2. *Mostre que existem infinitos ternos (a, b, c) de números naturais tais que*

$$2a^2 + 3b^2 - 5c^2 = 1997.$$

Problema 3. *Em Terra Brasilis existem n casas, onde vivem n duendes, cada um em uma casa. Nesse país temos estradas de mão única satisfazendo as seguintes condições:*

- *Cada estrada une duas casas.*
- *Em cada casa começa exatamente uma estrada.*
- *Em cada casa termina exatamente uma estrada.*

Todos os dias, a partir do dia 1, cada duende sai da casa onde está e chega à casa vizinha. Uma lenda de Terra Brasilis diz que, quando todos os duendes regressarem às suas casas originais, o mundo acabará.

(a) *Mostre que o mundo acabará.*

(b) *Se $n = 98$, mostre que é possível que os duendes construam e orientem as estradas de modo que o mundo não acabe antes de 300000 anos.*

Problema 4. *(Olimpíada Russa)*

(i) Uma comissão se reuniu 40 vezes. Em cada reunião estiveram presentes 10 pessoas de tal maneira que quaisquer dois dos membros da comissão não estiveram juntos em mais de uma oportunidade. Demonstre que a quantidade de membros da comissão é maior que 60.

(ii) Demonstre que com 25 pessoas não se pode formar mais que 30 comissões de 5 pessoas cada uma de modo que não haja duas comissões que tenham mais de um membro em comum.

Problema 5.

a) Demonstre que em um tabuleiro 4×4 é possível colocar sete estrelinhas de tal maneira que ao apagarmos duas filas e duas colunas quaisquer do tabuleiro, restará uma estrelinha

b) Demonstre que se existem menos que sete estrelinhas no tabuleiro 4×4, sempre é possível apagar duas filas e duas colunas de tal maneira que todas as casinhas restantes fiquem vazias.

Problema 6. *Inteiros positivos a, b relativamente primos são escolhidos de modo que $\dfrac{a+b}{a-b}$ é também um inteiro positivo. Prove que pelo menos um dos números $ab + 1$ e $4ab + 1$ é um quadrado perfeito.*

Problema 7. *(Olimpíada de São Petesburgo 1991) A representação de um número natural* X *não contém zeros, e* X *satisfaz a equação:* $X.\overline{X} = 1000 + P(X)$ *(onde* $\overline{X}$ *denota o número consistindo dos mesmos dígitos de* X *, mas escritos em ordem inversa, e* $P(X)$ *é o produto dos dígitos de* X*. Encontre todos os números* X*.*

Problema 8. *Em uma competição de matemática, cada aluno pode receber* $0, 1, 2, 3, 4$ *ou* 5 *pontos em cada problema. Calcule o número de maneiras que aluno pode obter* 30 *pontos sabendo que a prova tem 7 problemas.*

www.gruposigma.blogspot.com