Lista das Férias II

Nível 2

Samuel Barbosa

Problema 1. *Prove que é possível selecionar 2 subconjuntos disjuntos de um conjunto de dez números de 2 dígitos (base 10) cujos membros tenham a mesma soma.*

Problema 2. *Considere o conjunto S = 1,2,..., 3n. Mostre que se escolhermos mais que n elementos desse conjunto existirão dois deles, a e b , tais que $4ab + 1$ ou $ab + 1$ são quadrados perfeitos.*

Problema 3. *Seja ABC um triângulo retângulo em C. Sobre o lado AB tomamos um ponto D de modo que $CD = k$ e os raios das circunferências inscritas nos triângulos ACD e BCD sejam iguais. Mostre que $A(ABC) = k^2$.*

Problema 4. *Há dez pontos marcados sobre uma circunferência, numerados de 1 a 10 em alguma ordem. Traçamos em seguida todos os segmentos que esses pontos determinam e os pintamos, uns de vermelho e os demais de azul. É possível, sem trocar as cores dos segmentos, reenumerar os pontos de 1 a 10 de modo que se dois números eram unidos por um segmento vermelho agora o sejam por um segmento azul e vice-versa?*

Problema 5. *É dado um quadrado de lado 1. Mostre que, para cada conjunto finito de pontos no perímetro do quadrado, podemos achar um vértice do mesmo com a seguinte propriedade: a média aritmética dos quadrados das distâncias de tal vértice aos pontos do conjunto é maior ou igual a $3/4$.*

Problema 6. *Demonstre que existem infinitos inteiros positivos n tais que a quantidade de divisores positivos de $2^n - 1$ é maior que n.*

Problema 7. *Seja n um inteiro positivo tal que 24 divide $n + 1$. Prove que a soma dos divisores de n é divisível por 24.*

Problema 8. *Em cada casa de um tabuleiro $n \times n$ se pode colocar uma ficha. Diremos que uma ficha vê outra se ambas estão em uma mesma fila ou coluna e as casinhas intermediárias dessa fila ou coluna, se existirem, estão vazias(sem fichas). Determine o maior número de fichas que se pode colocar no tabuleiro de modo que cada ficha veja exatamente duas outras fichas.*

www.gruposigma.blogspot.com