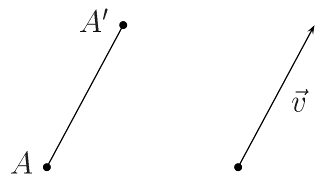
01 – **Translação**

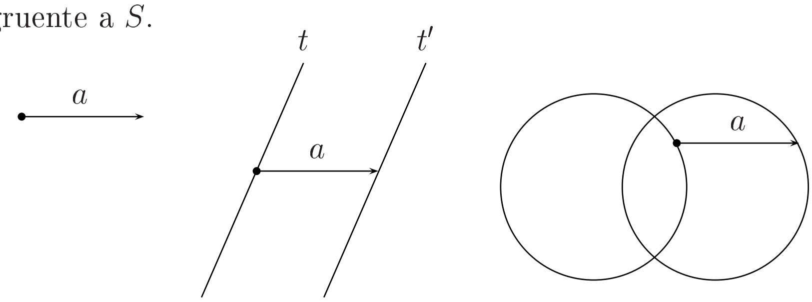
Considere no plano um vetor $\vec{v}$, de comprimento a. Dado um ponto A do plano, a imagem do ponto A pela translação segundo o vetor $\vec{v}$ é o ponto A' do mesmo plano tal que $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$, ou seja, $\overline{AA'} = a$ e tem mesma direção e sentido de $\vec{v}$.



De um modo geral, se uma figura F' é obtida a partir de uma outra figura F por meio de uma translação, então, todos os pontos correspondentes das duas figuras são movidos na mesma direção e a uma mesma distância de translação. Dessa forma, todos os segmentos correspondentes das duas figuras serão paralelos e terão a mesma direção.

Considere, então, duas figuras F e F' no plano tais que exista uma translação que transforme F em F'. Se A e B são dois pontos quaisquer de F, e A' e B' são os pontos resultantes após a translação, então, como $\overline{AA'}//\overline{BB'}$ e $\overline{AA'} = \overline{BB'}$, segue que o quadrilátero $ABB'A'$ é um paralelogramo. Assim, $\overline{AB}//\overline{A'B'}$ e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Logo, se F' é obtida a partir de F por uma translação, os segmentos correspondentes nas duas figuras serão iguais, paralelos e terão a mesma direção. A recíproca também é verdadeira: se duas figuras são tais que os segmentos correspondentes são iguais, paralelos e têm a mesma direção, então, existe uma translação que transforma uma figura na outra.

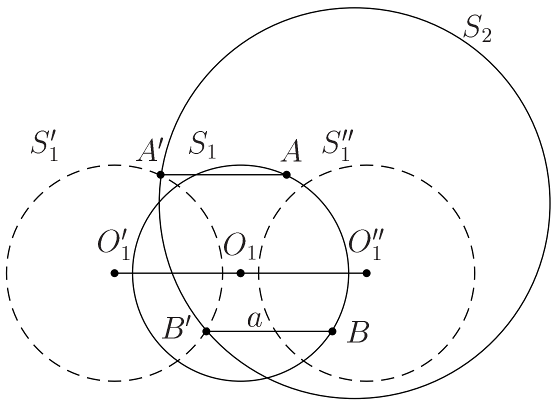
Particularmente, uma translação transforma uma reta t em uma reta t', paralela a t, e um círculo S em um círculo S', congruente a S.



Exemplo: Dois círculos, S_1 e S_2, e uma reta ℓ são dados. Construa uma reta, paralela a ℓ, tal que a distância entre os pontos de interseção desta reta com os círculos S_1 e S_2 seja igual a um dado valor a.

Solução:

Façamos uma translação do círculo S_1 na direção dada com distância a, obtendo os círculos S_1' e S_1'' (podemos usar dois sentidos para a translação, como é mostrado abaixo).



Sejam A' e B' os pontos de interseção de S_1' com S_2. É fácil ver que as retas paralelas a ℓ por A' e B' serão soluções do nosso problema. Se o círculo S_1'' interceptar o círculo S_2, teremos uma ou duas soluções adicionais.

O número de soluções dependerá do número de pontos de interseção de S_1' e S_1'' com S_2, podendo ser infinito para o caso em que S_1 e S_2 forem congruentes e com a distância entre os centros sendo a. Se S_1 e S_2 não forem congruentes teremos no máximo quatro soluções.

Exercícios:

1. Em que ponto devemos construir uma ponte MN sobre um rio que separa duas cidades A e B de modo que o caminho $AMNB$, da cidade A até a cidade B, seja o menor possível?

2. Dado um triângulo qualquer ABC, considere M, N e P os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente. Mostre que os triângulos AMP, BMN e CNP são congruentes entre si. Mostre que eles são congruentes aos triângulos determinados pelos seus baricentros, bem como aos triângulos determinados pelos seus ortocentros, incentros e circuncentros.

3. Ache o lugar geométrico dos pontos M cuja soma (diferença) das distâncias às retas ℓ_1 e ℓ_2 é igual a um dado valor a.

4. Sejam M e N os pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ de um quadrilátero $ABCD$. Mostre que se $\overline{MN}$ for igual à metade da soma dos comprimentos de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, então o quadrilátero é um trapézio.

5. Dadas as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um círculo, ache sobre um círculo um ponto X tal que as cordas $\overline{AX}$ e $\overline{BX}$ determinem em $\overline{CD}$ um segmento $\overline{EF}$ de comprimento a.

6. Construa um triângulo congruente a um triângulo dado e tal que seus lados passem por três pontos dados.

7. Considere dois círculos S_1 e S_2; construa uma reta ℓ:

(a) paralela a uma dada reta ℓ_1 e tal que S_1 e S_2 determinem cordas iguais sobre ℓ.

(b) paralela a uma dada reta ℓ_1 e tal que S_1 e S_2 determinem cordas cuja soma (ou diferença) seja igual a um dado valor a.

(c) passando por um ponto A dado e tal que S_1 e S_2 determinem cordas iguais sobre ℓ.