02 – **Simetrias**

I – Simetria Central

Dizemos que um ponto A' é obtido de um ponto A por meio de uma "simetria central" sobre o ponto O (chamado centro de simetria) se O é o ponto médio do segmento $\overline{AA'}$. Neste caso, dizemos que o ponto A' é o simétrico de A em relação ao ponto O.

É importante observar que uma simetria central é uma isometria, no sentido de que se A' e B' são os simétricos de A e B, respectivamente, em relação ao ponto O, então $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. De um modo mais abrangente, podemos afirmar que $\vec{A'B'} = -\vec{AB}$

Dessa forma, a imagem de qualquer figura por uma simetria central é uma figura semelhante. Em particular, a imagem de uma reta por uma simetria central é uma reta paralela e a de um círculo C é um círculo C' congruente a C cujo centro é o simétrico do centro de C em relação a centro de simetria.

Exercícios:

1. Construa uma reta passando por um dado ponto A tal que o segmento compreendido entre seus pontos de interseção com uma dada reta ℓ e um dado círculo S é dividido ao meio pelo ponto A.

2. Se A é um ponto comum a duas circunferências S_1 e S_2, construa uma reta ℓ tal que:

(a) As circunferências S_1 e S_2 determinem cordas iguais sobre ℓ.

(b) As circunferências S_1 e S_2 determinem cordas sobre ℓ cuja diferença é igual a um dado valor a.

3. Considere duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um dado círculo S, e um ponto J sobre a corda $\overline{CD}$. Ache um ponto X sobre a circunferência de S tal que as cordas $\overline{AX}$ e $\overline{BX}$ determinem sobre a corda $\overline{CD}$ um segmento $\overline{EF}$ cujo ponto médio é o ponto J.

4. No triângulo ABC as bissetrizes dos ângulos B e C encontram a mediana $\overline{AD}$ nos pontos E e F, respectivamente. Se $\overline{BE} = \overline{CF}$, prove que ABC é isósceles.

5. (a) Sejam O_1, O_2,..., O_n, (n par) pontos no plano e seja $\overline{AB}$ um segmento arbitrário; seja $\overline{A_1B_1}$ o segmento obtido de $\overline{AB}$ por uma simetria sobre O_1; $\overline{A_2B_2}$ é obtido a partir de $\overline{A_1B_1}$ por uma simetria sobre o ponto O_2, e assim sucessivamente; seja $\overline{A_nB_n}$ o segmento obtido de $\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$ por uma simetria sobre O_n. Prove que $\overline{AA_n} = \overline{BB_n}$. A afirmação desse problema continua verdadeira se n for ímpar?

(b) Considere um número ímpar de pontos O_1, O_2,..., O_n dados no plano. Seja A um ponto arbitrário movido sucessivamente por simetrias sobre os pontos O_1, O_2,..., O_n. Seja A_n o ponto encontrado. Movemos A_n através de simetrias sobre os mesmos pontos O_1, O_2,..., O_n. Mostre que o ponto A_{2n}, obtido como resultado dessas 2n simetrias, coincide com o ponto A. A afirmação continua verdadeira se n for par?

(c) Considere n pontos dados no plano. Um ponto arbitrário é movido sobre os pontos O_1, O_2,..., O_n por meio de simetrias; então, o mesmo ponto original é movido sucessivas vezes por simetrias sobre os pontos O_1, O_2,..., O_n na ordem inversa: O_n, O_{n-1},..., O_1. Para quais valores de n a posição final do ponto tomado coincide?

6. Seja n um número ímpar, e sejam n pontos dados no plano. Ache os vértices de um polígono de n lados que tem os pontos dados como pontos médios de seus lados. Considere ainda, o caso quando n é par.

II – Simetria Axial

Dizemos que um ponto A' é imagem de um ponto A por uma reflexão em uma reta ℓ (chamado eixo de simetria) se o segmento $\overline{AA'}$ é perpendicular a ℓ e é dividido ao meio por ℓ, ou seja, se a reta ℓ for a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$. Neste caso, dizemos que A' é simétrico a A em relação à reta ℓ.

Exercícios:

7. (a) São dados uma reta MN e dois pontos A e B no mesmo lado da reta. Ache um ponto X sobre MN tal que os segmentos $\overline{AX}$ e $\overline{BX}$ façam ângulos iguais com MN, ou seja

$$\angle AXM = \angle BXN.$$

(b) São dados uma reta MN e dois círculos S_1 e S_2 no mesmo lado da reta. Ache um ponto X sobre MN tal que uma das tangentes desse ponto ao primeiro círculo e uma das tangentes desse ponto ao segundo círculo façam ângulos iguais com MN.

(c) São dados uma reta MN e dois pontos A e B no mesmo lado da reta. Ache um ponto X sobre MN tal que os segmentos $\overline{AX}$ e $\overline{BX}$ façam ângulos com essa reta de modo que um deles seja duas vezes o outro, ou seja,

$$\angle AXM = 2 \cdot \angle BXN.$$

8. Considere três retas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, concorrentes em um único ponto, e um ponto A sobre ℓ_1. Construa um triângulo ABC tal que ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 sejam as bissetrizes do triângulo.

9. (a) Construa um triângulo ABC dados a base $\overline{AB} = a$, a altura $\overline{CH} = h$ e a diferença *delta* dos ângulos da base.

(b) Construa um triângulo dados dois lados e a diferença δ dos ângulos que eles formam com o terceiro lado.

10. Seja $M\hat{O}N$ um ângulo dado junto com dois pontos A e B em seu interior. Ache um ponto Z sobre OM tal que o triângulo XZY seja isósceles, onde X e Y são os pontos de interseção de AZ e BZ com ON.

11. Seja ABC um triângulo acutângulo. Seja $\overline{AD}$ a altura sobre $\overline{BC}$, e seja H um ponto qualquer sobre o segmento $\overline{AD}$. As retas BH e CH intersectam AC e AB em E e F, respectivamente. Prove que $\angle EDH = \angle FDH$.

12. Prove que se um polígono tem mais de dois eixos de simetria, então, eles são concorrentes em um único ponto.

13. Dados uma reta ℓ, dois pontos A e B em um dos lados de ℓ e um segmento de comprimento a, encontre um segmento $\overline{XY}$ de comprimento a sobre ℓ, tal que o comprimento do caminho $AXYB$ seja o menor possível.

14. Seja ABC um triângulo acutângulo e AD, BE e CF as alturas relativas aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Mostre que se a reta que liga o ortocentro ao circuncentro de ABC for paralela a um dos lados, então os lados do triângulo DEF estão em progressão aritmética.

15. Considere um ponto P sobre a borda de uma elipse com focos A e B. Mostre que a reta tangente à elipse por P é perpendicular à bissetriz do ângulo $\angle APB$.

16. Seja ABC um triângulo acutângulo de ortocentro H e circuncentro O. A mediatriz do segmento AH corta AB no ponto P e AC no ponto Q. Mostre que $\angle AOP = \angle AOQ$.

17. Construa um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto no vértice A, conhecendo as medidas dos segmentos AC e BI, onde I é o incentro do dado triângulo.

18. (IMO - 95) Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo com $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$, e $\angle BCD = \angle EFA = 60°$. Sejam G e H dois pontos no interior do hexágono tais que $\angle AGB = \angle DHE = 120°$. Prove que

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$$

19. (Torneio das Cidades) Um círculo com centro O está inscrito em um ângulo. Seja A a reflexão de O sobre um dos lados do ângulo. As tangentes ao círculo através de A interceptam o outro lado do ângulo nos pontos B e C. Prove que o circuncentro do triângulo ABC está sobre a bissetriz do ângulo original.

20. (OIM) É possível construirmos um triângulo sendo conhecidos apenas o ortocentro e dois dos pontos médios dos lados?

21. Dado um triângulo ABC, encontre um ponto P do plano tal que a soma $PA + PB + PC$ seja a menor possível. (Problema de Fermat)

22. Dado o triângulo acutângulo ABC, inscreva em ABC um triângulo cujo perímetro seja o menor possível. (Problema de Fagnano)