03 – **Rotações**

Sejam O um ponto no plano e α um ângulo dado; adotemos um sentido de rotação (digamos, por exemplo, o sentido anti-horário). Seja A um ponto arbitrário no plano; Dizemos que o ponto A' é obtido do ponto A por uma rotação com centro em O e ângulo de rotação igual a α, se A' é o ponto do plano tal que $\overline{AO} = \overline{A'O}$ e $\angle AOA' = \alpha$.

Exercícios:

1. (a) Considere um triângulo eqüilátero ABC inscrito em um círculo Γ, e seja P um ponto sobre o menor arco BC de Γ. Prove que $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$.
(b) Em um dado triângulo ABC qualquer, determine um ponto P no seu interior tal que $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ seja mínimo. (Problema de Fermat)

2. (Alemanha - 94) Em um plano considere uma reta g e um ponto A fixo, não pertencente a g. Um ponto P corre sobre g. Determine o conjunto dos pontos X do plano de modo que X, A e P sejam vértices de um triângulo equilátero.

3. (Irã - 95) Suponha que $ABCD$ é um quadrado e K e N são pontos sobre $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, respectivamente, tal que $\overline{AK} \cdot \overline{AN} = 2 \cdot \overline{BK} \cdot \overline{DN}$. Sejam L e M os pontos de interseção da diagonal $\overline{BD}$ com $\overline{CK}$ e $\overline{CN}$, respectivamente. Prove que os pontos K, L, M, N e A são concíclicos.

4. Em um plano são dados um círculo C com diâmetro sobre a reta ℓ, e um ponto P em C, não pertencente a ℓ. Construa todos os triângulos equiláteros que têm um vértice em P um em C e o outro sobre o diâmetro ℓ.

5. Ache todos os triângulos equiláteros cujos vértices encontram-se sobre três retas paralelas dadas ou sobre três círculos concêntricos.

Composição de Rotações

Como vimos anteriormente, uma rotação de centro em O e ângulo α é uma isometria (conserva o comprimento) que transforma cada ponto P em um ponto P' tal que $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e $\angle POP' = \alpha$. Podemos combinar várias rotações entre si ou com outras transformações. Estudaremos aqui a composição de duas rotações.

Considere duas rotações sucessivas (no mesmo sentido) com centro comum O e com ângulos de rotação iguais a α e β, respectivamente. É imediato que estas duas rotações são equivalentes a uma única rotação com centro O e ângulo $(\alpha + \beta)$. No entanto, o que podemos afirmar se o centro da primeira rotação for diferente do centro da primeira? A verdade é que estas duas rotações continuarão sendo equivalentes a uma única rotação, com centro em algum ponto O do plano e de ângulo $(\alpha + \beta)$.

Veremos como encontrar este centro de rotação.

Seja F_1 a figura obtida a partir de F por uma rotação com centro O_1 e ângulo de rotação α, e seja F' a figura obtida a partir de F_1 por uma rotação (no mesmo sentido) com centro O_2 e ângulo β.

Se a primeira rotação leva o segmento $\overline{AB}$ da figura F a um segmento $\overline{A_1B_1}$ da figura F_1, e se a segunda rotação leva o segmento $\overline{A_1B_1}$ a um segmento $\overline{A'B'}$ da figura F', então, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A_1B_1}$ são iguais e formam um ângulo α; os segmentos $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A'B'}$ são iguais e formam um ângulo β. Segue que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são iguais e formam um ângulo $\alpha+\beta$. (Se $\alpha+\beta = 360°$, significa dizer que os segmentos correspondentes das figuras F e F' são paralelos). Mas, então, existe uma rotação com centro em um ponto O que leva a figura F até a figura F'. Assim, concluímos que as figuras F e F' estão relacionadas por uma rotação, se $\alpha+\beta \neq 360°$, e por uma translação se $\alpha+\beta = 360°$.

Mostraremos como encontrar o centro O a partir de O_1 e O_2 e dos ângulos α e β. Suponha inicialmente que $\alpha+\beta \neq 360°$. Nesse caso, a soma das duas rotações é uma rotação com ângulo igual a $\alpha+\beta$. Vamos achar o seu centro.

As duas rotações levam o ponto O_1 da primeira rotação até o ponto O_1', tal que $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1'O_2}$ e $\angle O_1O_2O_1' = \beta$. (A primeira deixa O_1 fixo e a segunda leva O_1 até O_1'). Além disso, estas duas rotações levam o ponto O_2'' até o ponto O_2, tal que $\overline{O_2''O_1} = \overline{O_2O_1}$ e $\angle O_2''O_1O_2 = \alpha$.(A primeira leva O_2'' até O_2 e a segunda deixa O_2 fixo).

Segue que o centro O que estamos procurando é eqüidistante de O_2 e O_2'' e de O_1 e O_1'; conseqüentemente, o ponto O coincide com o ponto de interseção das mediatrizes ℓ_1 e ℓ_2 de $\overline{O_1O_1'}$ e $\overline{O_2O_2''}$, respectivamente. Mas, é claro que ell_1 passa por O_1 e $\angle \ell_1O_1O_2 = \alpha/2$, que ℓ_2 passa por O_2 e $\angle \ell_2O_1O_2 = \beta/2$. As retas ℓ_1 e ℓ_2 são determinadas sob estas condições, sua interseção nos dá o ponto O desejado.

Se $\alpha+\beta = 360°$, então, as duas rotações eqüivalem a uma translação, de modo que elas levam O_1 até O_1'(ou O_2 até O_2'); neste caso, é fácil notar que ℓ_1 e ℓ_2 serão paralelas entre si e perpendiculares à direção de translação, de tal modo que a distância entre ℓ_1 e ℓ_2 é igual à metade da distância de translação.

Exercícios:

6. (a)Construa triângulos eqüiláteros sobre os lados de um triângulo arbitrário ABC. Prove que os centros O_1, O_2 e O_3 desses triângulos são vértices de um triângulo eqüilátero.

(b)Sobre os lados de um triângulo arbitrário ABC, construímos triângulos isósceles BCA_1, ACB_1 e ABC_1, externamente ao triângulo, com ângulos nos vértices A_1, B_1 e C_1 iguais a α, β e δ, respectivamente. Prove que, se $\alpha+\beta+\delta = 360°$, então, os ângulos do triângulo $A_1B_1C_1$ são iguais a $\alpha/2$, $\beta/2$ e $\delta/2$.

7. Sobre os lados de um triângulo arbitrário ABC, construímos triângulos eqüiláteros BCA_1, ACB_1 e ABC_1, tal que os vértices A e A_1 estejam sobre lados opostos de $\overline{BC}$, B_1 e B estejam sobre lados opostos de $\overline{AC}$, mas C_1 e C estejam sobre o mesmo lado de $\overline{AB}$. Seja M o centro do triângulo ABC_1. Prove que $\overline{B_1M} = \overline{MA_1}$ e $\overline{B_1MA_1} = 120°$.

8. Construa um polígono de n lados dados os n pontos que são os vértices dos triângulos isósceles construídos sobre os lados do polígono, e sendo conhecidos os ângulos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dos triângulos.

9. Sobre os lados de um quadrilátero convexo $ABCD$, quadrados são construídos, exteriormente. Os centros desses quadrados são M_1, M_2, M_3 e M_4. Mostre que $\overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_4}$ e $\overline{M_1M_3} \perp \overline{M_2M_4}$.

10. (IMO - 1975) Sobre os lados de um triângulo qualquer ABC, triângulos ABR, BCP e CAQ são construídos, externamente, com $\angle CBP = \angle CAQ = 45°$, $\angle BCP = \angle ACQ = 30°$, $\angle ABR = \angle BAR = 15°$. Prove que $\angle QRP = 90°$ e $\overline{QR} = \overline{RP}$.

11. (Torneio das Cidades) O ponto M está no interior do quadrilátero convexo $ABCD$ de modo que os triângulos AMB e CMD sejam isósceles ($\overline{AM} = \overline{MB}$, $\overline{CM} = \overline{MD}$) e $\angle AMB = \angle CMD = 120°$. Prove que existe um ponto N tal que os triângulos BNC e DNA sejam eqüiláteros.