Função Parte Inteira

Samuel Barbosa

8 de março de 2006

1 Definição e Propriedades

Definição 1.1. *A parte inteira de um número real x é o maior inteiro $\lfloor x \rfloor$ que não é maior que x. Definimos a parte fracionária $\{x\}$ de x por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. (exemplos: $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor 3,5 \rfloor = 3$ e $\lfloor -4,7 \rfloor = -5$)*

Teorema 1.1. *Sejam x e y números reais. Então:*

1. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ *e* $0 \leq \{x\} < 1$.
2. $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$ *se m é um inteiro.*
3. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
4. $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor$ *se m é um inteiro positivo.*
5. *Se n e a são inteiros positivos,* $\left\lfloor \dfrac{n}{a} \right\rfloor$ *é o número de inteiros entre $1, 2, ..., n$ que são divisíveis por a.*

Prova: O item (1) é apenas uma reformulação da definição.O item (2) é deixado como exercício. Para provar (3): $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \{x\} + \{y\} \rfloor = \lfloor x + y \rfloor$. Como $\{x\} + \{y\} < 2 \Rightarrow \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor \leq 1$ daí $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. Para provar (4): Seja $\lfloor x \rfloor = qm + r$ com $0 \leq r < m - 1$. Então: $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{m} \right\rfloor = q$. Como $0 \leq \{x\} < 1 \Rightarrow q = q + \left\lfloor \frac{r + \{x\}}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{qm + r + \{x\}}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor$. Finalmente para provar (5), sejam $a, 2a, ..., ja$ todos os inteiros positivos $\leq n$ que são divisíveis por a. Então $ja \leq n < (j+1)a \Rightarrow j \leq \frac{n}{a} < j + 1 \Rightarrow j = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$.

Teorema 1.2 (*Fórmula de Polignac*)**.** *Seja p um primo. Então o maior expoente e tal que $p^e | n!$ é* $e = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$.

Prova: O que significa $\left\lfloor \dfrac{n}{p^i} \right\rfloor$? Ele conta o número de inteiros positivos menores ou iguais a n divisíveis por p^i. Cada múltiplo de p contribui com um expoente 1 para p em $n!$, cada múltiplo de p^2 contribui com expoente 2 para p em $n!$ e assim sucessivamente. Assim $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ é a soma de todas essas contribuições sem contar repetições(veja que um múltiplo de p^i é contado i vezes (em $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$, ..., $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ pois contribui com um expoente i). Este resultado também pode ser provado usando indução.

Exercício 1.1. *Mostre que* $\lfloor x + y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercício 1.2. *Mostre que a parte fracionária do número* $\sqrt{4n^2 + n}$ *não é maior que* $0,25$.

Exercício 1.3. *Mostre que* $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor x + \frac{i}{k} \right\rfloor = \lfloor kx \rfloor$.

Exercício 1.4. *Em quantos zeros termina a representação decimal de* 1000*?*

Exemplo 1.1. *Mostre que se* m *e* n *são inteiros positivos, então:* $\dfrac{(2m)!(2n)!}{(m)!(n)!(m+n)!}$ *é um inteiro.*

Prova: Pelo teorema anterior basta mostrarmos que: $\left\lfloor \dfrac{2m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{2n}{p^k} \right\rfloor \geq \left\lfloor \dfrac{m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{m+n}{p^k} \right\rfloor$ para todo primo p e todo inteiro k. Devido ao exercício 1 isto é verdade.

Exercício 1.5. *Prove que* $\binom{2n}{n}$ *divide* $MMC\{1, 2, ..., 2n\}$.

Exercício 1.6. *Sejam* $\{a_i\}_{0 \leq i \leq r}$*, inteiros não negativos com* $n = a_1 + a_2 + ... + a_r$*. Mostre que* $\dfrac{n!}{a_1!a_2!...a_r!}$ *é um inteiro.*

Exercício 1.7. *Considere um inteiro* $n \geq 1$ *e inteiros* i *,* $1 \leq i \leq n$*. Para cada* $k = 0, 1, 2, ...$ *encontre o número de* i*'s que são divisíveis por* 2^k *mas não por* 2^{k+1}*. Então prove que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^i} + \frac{1}{2} \right\rfloor = n$.

Exercício 1.8. *Seja* p *um divisor primo do número* $\dbinom{2n}{n}$ *com* $p \geq \sqrt{2n}$*, então o expoente de* p *na fatoração em primos do do número* $\dbinom{2n}{n}$ *é igual a 1.*

Teorema 1.3. *Seja* $v_p(n)$ *a soma dos dígitos da representação de* n *na base* p*. Mostre que o expoente de* p *na fatoração em primos de* $n!$ *é* $\dfrac{n - v_p n}{p-1}$.

Prova: Seja $k_p(n!)$ o maior expoente de p que divide $n!$. Suponha que $n = d_0 + d_1 p + ... + d_r p^r$ onde $0 \leq d_i < p$. Então:

$\left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor = d_1 + d_2 p + ... + d_r p^{r-1}$,
$\left\lfloor \dfrac{n}{p^2} \right\rfloor = d_2 + d_3 p + ... + d_r p^{r-2}$,

...

$\left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor = d_r$. Somando tudo obtemos: $k_p(n!) = d_1 + d_2(p+1) + d_3(p^2 + p + 1) + ... + d_r(p^{r-1} + ... + 1) \Rightarrow$ $(p-1)k_p(n!) = d_1(p-1) + d_2(p^2 - 1) + ... + d_r(p^r - 1) = n - v_p(n)$.

Exercício 1.9. *Seja* $B(m)$ *o conjunto dos inteiros* r *tais que* 2^r *é um termo na representação na base 2 de* n*. Por exemplo,* $B(100) = \{2, 5, 6\}$*. Prove que* $\binom{n}{k}$ *é ímpar se, e somente se,* $B(k) \subseteq B(n)$.

Exemplo 1.2. *Prove que existe um natural* n *tal que a representação decimal de* n^2 *começa (da esquerda para a direita) com o número 200620062006...2006 (2006 vezes).*

Prova: Podemos encontrar um n que comece com qualquer sequência de dígitos $(c_1 c_2 ... c_r) = m$. Escolha um k suficientemente grande tal que $2\sqrt{m} < 10^{k-1}$. Seja $n = \lfloor 10^k \sqrt{m} + 1 \rfloor$. Então: $0 < 10^k \sqrt{m} < n \leq 10^k \sqrt{m} + 1 \Rightarrow 10^{2k} m < n^2 \leq 10^{2k} m + 2.10^k \sqrt{m} + 1 < n^2 \leq 10^{2k} m + 10^{2k-1} + 1 < 10^{2k}(m+1)$. Assim n^2 começa com a sequência de dígitos m.

Exercício 1.10. *(OBM 1992) Prove que existe um natural n tal que a expansão decimal de n^{1992} começa com 1992 algarismos iguais a 1.*

Exercício 1.11. *(OBM 1999) Prove que há pelo menos um algarismo diferente de zero entre a 1000000^a e a 3000000^a casa decimal de $\sqrt{2}$ após a vírgula.*

Exercício 1.12. *Sejam a, m, b inteiros dados, com $mdc(a, m) = 1$. Calcule* $\displaystyle\sum_{x=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{ax+b}{m} \right\rfloor$.

Prova: Dados dois inteiros n e l, se r é o resto da divisão de n por l, o número $\left\{ \frac{n}{l} \right\}$ é igual a $\frac{r}{l}$. Como $mdc(a, m) = 1$, para qualquer inteiro $0 \le r < m$ existe um i, $0 \le i < m$ tal que $ai + b \equiv r \pmod{m}$ (isto significa que o conjunto $\{ax + b \mid 0 \le x < m\}$ é um sistema completo de restos módulo m). Assim $\displaystyle\sum_{x=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{ax+b}{m} \right\rfloor = \sum_{x=0}^{m-1} \frac{ax+b}{m} - \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{ax+b}{m} \right\} = \frac{a(m-1)}{2} + b - \sum_{r=0}^{m-1} \left\{ \frac{r}{m} \right\} = \frac{a(m-1)}{2} + b - \frac{m-1}{2} = \frac{(a-1)(m-1)}{2} + b$.

Problemas

Problema 1.1. *Prove que, para qualquer n natural,* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n + 2^{i-1}}{2^i} \right\rfloor = n$.

Problema 1.2. *Prove que, para qualquer n natural,* $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{9n+8} \rfloor$.

Problema 1.3. *(Bulgária 1996) A sequêcia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}$. Prove que se $n \ge 4$ então $\lfloor {a_n}^2 \rfloor = n$.*

Problema 1.4. *(Japão 1996) Seja $x > 1$ um número real que não é um inteiro. Defina para $n \ge 1, a_n = \lfloor x^{n+1} \rfloor - x\lfloor x^n \rfloor$. Prove que a sequência a_n não é periódica.*

Problema 1.5. *(Korea 1997) Expresse $\sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ em termos de n e $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.*

Problema 1.6. *(Canadá 1998) determine o número de soluções reais da equação* $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor = a$.

Problema 1.7. *(República Tcheca e Eslovaca 1998) Encontre todos os números reais x tais que $x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = 88$.*

Problema 1.8. *Encontre todos o reais α tais que a igualdade $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n+\alpha} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor$ é verdadeira para todos os naturais n.*

Problema 1.9. *Prove que, para todo inteiro positivo n, $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{n+2} \rfloor$.*

Problema 1.10. *Se a, b, c são reais e $\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor nc \rfloor$ para todo n natural, então $a \in \mathbb{Z}$ ou $b \in \mathbb{Z}$.*

Problema 1.11. *Sejam a, b, c e d números reais. Suponha que $\lfloor an \rfloor + \lfloor bn \rfloor = \lfloor cn \rfloor + \lfloor dn \rfloor$ para todos os inteiros positivos n. Mostre que pelo menos um dentre $a+b, a-c, a-d$ é inteiro.*

Problema 1.12. *(São Petesburgo) Seja n um natural. Prove que o n-ésimo natural não quadrado é dado por $\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \rfloor$.*

Problema 1.13. *(Romênia 2003) Sejam n e p inteiros positivos com $p > 2^n$. Prove que a parte inteira do número* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt[p]{1 + \binom{n}{k}}$ *é igual a $n+1$.*

Problema 1.14. *Seja $n \geq 3$ um inteiro positivo. Mostre que é possível eliminar no máximo dois elementos do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ de modo que a soma dos números restantes seja um quadrado perfeito.*

Problema 1.15. *Encontre todos os inteiros positivos n tais que $\left\lfloor \frac{n^3+8n^2+1}{3n} \right\rfloor$ é um número primo.*

Problema 1.16. *(Rioplatense) Seja r um real tal que $\left\lfloor r + \dfrac{19}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \dfrac{20}{100} \right\rfloor + ... + \left\lfloor r + \dfrac{92}{100} \right\rfloor = 554$. Calcule $\lfloor 100r \rfloor$.*

Problema 1.17. *Determine os pares (a, b) de reais tais que $a\lfloor bn \rfloor = b\lfloor an \rfloor$ para todo inteiro positivo n.*

Problema 1.18. *Se p é primo , então $\dbinom{p^k}{i} \equiv 0(\mod p)($ para $1 \leq i \leq p^k - 1)$.*

Problema 1.19. *Prove que $\lfloor (\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+2})^3 \rfloor$ é divisível por 8.*

Problema 1.20. *Prove que, $t_1 + t_2 + ... + t_n = \left\lfloor \dfrac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \dfrac{n}{n} \right\rfloor$, onde t_n é o número de divisores do natural n.*

Problema 1.21. *Prove que, se p é um número primo, então a diferença $\dbinom{n}{p} - \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$ é divisível por p.*

Problema 1.22. *(Korea 2000) Seja p um número primo tal que $p \equiv 1(\mod 4)$. Calcule:*
$\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \left(\left\lfloor \frac{2k^2}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{k^2}{p} \right\rfloor \right)$. *(Neste problema, talvez você precise usar um pouco de resíduos quadráticos)*

Problema 1.23. *Prove que, se os números positivos α e β têm a propriedade que entre os números $\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, ...$; $\lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\beta \rfloor, \lfloor 3\beta \rfloor, ...$ todo natural ocorre exatamente uma vez, então α e β são irracionais tais que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Reciprocamente, se α e β são irracionais com a propriedade $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ então todo natural ocorre precisamente uma vez na sequência: $\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, ...$; $\lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\beta \rfloor, \lfloor 3\beta \rfloor, ...$*

Problema 1.24. *Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tais que:*

1. *$f(x + a) = f(x) + a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.*

2. *$f(f(x)) = 0$ se $x \in [0, 1)$.*

Problema 1.25. *(Revista Eureka)Prove que se $A \subset \mathbb{N}$ é um conjunto não-vazio tal que $n \in A \Rightarrow 4n \in A$ e $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \in A$ então $A = \mathbb{N}$.*

2 Trabalhando em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Muitos problemas podem ficar simplificados se tentarmos dar outro tipo de interpretação à eles. Nesta seção tentaremos dar uma interpretação geométrica para certas somas envolvendo "partes inteiras". Começaremos com um fato que irá nos ajudar bastante.

Exemplo 2.1. *Considere um tabuleiro T, de dimensões $m \times n$, onde m e n são inteiros positivos. Prove que uma diagonal de T passa por exatamente $m + n - mdc(m, n)$ quadradinhos 1×1.*

Prova: Suponhamos os quadradinhos de lado unitário. Vamos fazer primeiro o caso em que $mdc(m, n) = 1$. Esse tabuleiro em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pode ser reperesentado por um retângulo de vértices : $O = (0, 0), A = (m, 0), B = (m, n), C = (0, n)$. Queremos provar que a diagonal OB passa por exatamente $m + n - 1$ quadradinhos. Quando esta diagonal corta um quadradinho, um segmento de reta dela, fica totalmente contido no quadradinho. Basta contarmos em quantos segmentos esses quadradinhos dividem OB. Como os vértices têm coordenadas inteiras e cada quadradinho tem lado unitário teremos que cada quadradino tem seus vértices em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. A equação da reta OB é $x = \frac{m}{n}y$. Se um vértice, digamos (a, b), de algum dos quadradinhos do tabuleiro está em OB, temos: $a = \frac{m}{n}b \Rightarrow an = bm$. Como $m|an$ e $mdc(m, n) = 1 \Rightarrow m|a \Rightarrow a = 0$ ou $a \geq m$. No primeiro caso $(a, b) = O$ e no segundo como $a \leq m$ pois a está no inteiror do retângulo temos $(a, b) = B$. Assim OB não contém vértices de quadradinhos diferentes de O e $B \Rightarrow OB$ corta cada uma das retas $x = 1, 2, ..., m - 1$ e $y = 1, 2, ..., n - 1$ em pontos distintos. Determinando assim $m + n - 2$ pontos sobre OB. Juntando esses $m + n - 2$ pontos marcados sobre a diagonal com O e B teremos $m + n$ pontos e o segmento entre dois deles está contido em exatamente um quadradinho $\Rightarrow OB$ corta $m + n - 1$ quadradinhos. Agora se $mdc(m, n) = d \Rightarrow m = dm_1, n = dn_1$ com $mdc(m_1, n_1) = 1$. Divida agora o tabuleiro em d^2 subtabuleiros de tamanho $m_1 \times n_1$ através de cortes paralelos aos lados do retângulo. Use o que fizemos nos d tabuleiros que são cortados pela diagonal OB.

Exemplo 2.2. *Suponha que $mdc(p, q) = 1$. Então* $\displaystyle\sum_{i=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Prova: Considere o retângulo $T = O = (0, 0), A = (q, 0), B = (q, p), C = (0, p)$. Claramente existem $(p-1)(q-1)$ pontos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ no interior do retângulo T. Não pode existir pontos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ na diagonal OB. Por simetria, existem $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ pontos no interior do retângulo OAB. Dado $1 \leq i \leq (q-1)$ existem exatamente $\left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor$ pontos da forma $(i, j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ no interior do triângulo OAB. Assim $\displaystyle\sum_{i=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Problemas

Problema 2.1. *(Taiwan 1998) Mostre que, para inteiros positivos m e n , $mdc(m, n) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{kn}{m} \right\rfloor + m + n - mn$.*

Problema 2.2. *(Balcânica 2003) Seja $ABCD$ um tabuleiro $m \times n$ de quadrados unitários. Assuma que $mdc(m, n) = 1$ e m, n são ímpares. Os pontos de interseção entre a diagonal principal AC e os lados dos quadrados unitários são $A_1, A_2, ..., A_k$, nesta ordem $(k \geq 2)$ e $A_1 = A, A_k = C$. Prove que $A_1A_2 - A_2A_3 + A_3A_4 - ... + (-1)^k A_{k-1}A_k = \dfrac{\sqrt{m^2 + n^2}}{mn}$.*

Problema 2.3. *(Geórgia 1998) dado $n > 5$, as retas $x = n$ e $y = n$ são desenhadas no plano cartesiano. considere os pontos com coordenadas inteiras no interior (ou bordo) do quadrado formado por essas retas e pelos eixos. Quantos desses pontos tem a soma das coordenadas multiplo de 5?*

Problema 2.4. *Um jogador solitário recebe após cada jogada a ou b pontos (a e b são inteiros positivos com $a < b$) e estes se acumulam jogada após jogada. Existem 35 valores impossíveis para a pontuação acumulada e um desses valores é 58. Encontre a e b.*

3 Conjugados

Suponha que α seja um irracional e que estamos interessados em calcular o resto de $\lfloor \alpha^n \rfloor \mod m$. Se encontrarmos um β tal que $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta \in \mathbb{Z}$ nosso trabalho será facilitado. Considere a equação: $x^2 - ax - b = 0$ onde $a = \alpha + \beta$ e $b = \alpha\beta$. Como α e β são raízes:

$$\alpha^2 = a\alpha + b \Rightarrow \alpha^{n+1} = a\alpha^n + b\alpha^{n-1}$$
$$\beta^2 = a\beta + b \Rightarrow \beta^{n+1} = a\beta^n + b\beta^{n-1}$$

Seja $K_n = \alpha^n + \beta^n$. Assim $K_{n+1} = aK_n + bK_{n-1}$. Como a e b são inteiros e $K_1 = \alpha + \beta \in \mathbb{Z}$, $K_2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \in \mathbb{Z} \Rightarrow K_n \in \mathbb{Z}\, \forall n \in \mathbb{N}$. $K_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{\alpha^n\} + \lfloor \alpha^n \rfloor + \{\beta^n\} + \lfloor \beta^n \rfloor \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{\alpha^n\} + \{\beta^n\} \in \mathbb{Z}$. Mas $0 < \{\alpha^n\} + \{\beta^n\} < 2 \Rightarrow \{\alpha^n\} + \{\beta^n\} = 1$ Como $0 < \beta < 1 \Rightarrow \lfloor \beta^n \rfloor = 0 \Rightarrow K_n = \lfloor \alpha^n \rfloor + 1$. Agora é bem mais fácil calcular $K_n \mod m$ pois sabemos que ele satisfaz uma recursão com os primeiros termos e a lei de formação conhecidos. Podemos modificar um pouco a idéia anterior para o caso $-1 < \beta < 0$.

Exemplo 3.1. *Prove que, para todo natural n temos:* $3 \mid \left\lfloor \left(\frac{7 + \sqrt{37}}{2} \right)^n \right\rfloor$.

Prova: Sejam $\alpha = \frac{7+\sqrt{37}}{2}$ e $\beta = \frac{7-\sqrt{37}}{2}$ Então se $K_n = \alpha^n + \beta^n \Rightarrow K_{n+1} = 7K_n - 3K_{n-1}$. Veja que $K_1 = 7 \equiv 1 (\mod 3)$ e $K_2 = 43 \equiv 1 (\mod 3) \Rightarrow K_n \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}$. $K_{n+1} \equiv 7K_n \equiv K_n (\mod 3) \Rightarrow \lfloor \alpha^n \rfloor + 1 = K_n \equiv 1 (\mod 3)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercício 3.1. *(Teste de Seleção do Brasil para a Cone Sul) Prove que para todo inteiro positivo k , a parte interia do número $(7 + 4\sqrt{3})^k$ é ímpar.*

Exercício 3.2. *(Olimpíada Iraniana) Mostre que,* $k^n - \lfloor k^n \rfloor = 1 - \dfrac{1}{k^n}$ *onde* $k = 2 + \sqrt{3}$.

Exemplo 3.2. *Encontre a maior potência de 2 que divide* $\lfloor (3 + \sqrt{11}))^{2n+11} \rfloor$.

Prova: Sejam $\alpha = 3 + \sqrt{11}$ e $\beta = 3 - \sqrt{11}$ e $K_n = \alpha^n + \beta^n \Rightarrow K_{n+1} = 6K_n + 2K_{n-1}$. Prove por indução que $2^{n+1} \mid K_{2n}$ e $2^{n+1} \| K_{2n+1}$ ($a^n \| b$ significa que $a^n | b$ mas $a^{n+1} \not| b$). Assim $K_{2n+1} = \lfloor \alpha^{2n+1} \rfloor + \lfloor \beta^{2n+1} \rfloor + \{\beta^{2n+1}\} + \{\alpha^{2n+1}\} = \lfloor \alpha^{2n+1} \rfloor + (-1) + 1 = \lfloor \alpha^{2n+1} \rfloor$ (pois $-1 < \beta < 0 \Rightarrow \lfloor \beta^{2n+1} \rfloor = -1$). Então a maior potência é 2^{n+1}.

Problemas

Problema 3.1. *(Hungria 2000) Se $A = (1000 + \sqrt{1000^2 + 1})^{1000}$, determine o 2000-ésimo algarismo após a vírgula de sua representação decimal.*

Problema 3.2. *Prove que para todo inteiro $m > 2$ existe um irracional r que depende de m, tal que $\lfloor r^k \rfloor \equiv -1 (\mod m)$.*

Problema 3.3. *Considere a sequêcica de reais positivos $a_1, a_2, ...,$ tal que $a_1 = 1$ $a_n = a_{n+1} + a_{n+2}$, para todo inteiro $n > 0$. Prove que o dígito das unidades de* $\dfrac{1}{a_i}$ *não pode ser 0,3,5 ou 8 para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Problema 3.4. *(Seletiva do Brasil para a IMO-2001) Encontre todos os naturais n tais que $\alpha^n - n^2\alpha$ é um inteiro onde* $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Problema 3.5. *(Revista Eureka) Seja α a maior raiz da equação $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Prove que $\lfloor \alpha^{2004} \rfloor$ é divisível por 17.*