PARIDADE

Samuel Barbosa

30 de março de 2006

Dizemos que um número tem paridade par se ele for par, e paridade ímpar, se ele for ímpar. Observar a paridade de um número é algo bem simples mas com aplicações fantásticas em problemas de olimpíadas. Vejamos um exemplo:

Alternações

Exercício 1. *Sobre um tableiro de xadrez, um príncipe começa do quadrado a1 e retorna após fazer alguns movimentos. Mostre que o príncipe fez um número par de movimentos (um prínncipe é uma peça que não existe no jogo do xadrez e que pode andar somente na horizontal e vertical, uma casa por vez).*

Solução. *Veja que em cada movimento, o príncipe muda para uma casa de cor oposta. Como a casa a1 é branca, após um número* **ímpar** *de movimentos o príncipe estará numa casa da cor preta. Para ele ter retornado até a casa branca do início, ele deverá ter feito um número* **par** *de movimentos.*

Exemplo 1. *Pode um príncipe começar do quadrado a1 de um tabu leiro de xadrez, ir até o quadrado h8, visitando cada um dos quadrados restantes exatamente uma vez?*

Solução. *A resposta é não. Em cada movimento, o príncipe pula de um quadrado de uma cor para um quadrado da cor oposta. Como o rei tem que fazer 63 movimentos, o último movimento irá deixá-lo em uma casa da cor oposta a cor de a1. Entretanto, a1 e h8 tem a mesma cor. Mas isto é um absurdo.*

O último problema nos conduz a um tipo muito importante de demonstração: **prova por absurdo**. Suponha que lhe perguntaram se é possível somar cinco números ímpares e obter o número 100. Após algumas tentativas você começa a desconfiar que isto não é possível. Mas como **provar** que não é possível? Se realmente fosse possível somar 5 números ímpares e obter 100 o que aconteceria? Como a soma de cinco números ímpares é sempre ímpar obteríamos que 100 é um número ímpar. Mas 100 não é ímpar! Logo **não é possível** existirem tais 5 números. Para provar que algo não é possível, basta supormos que é possível e chegarmos a um absurdo.

Exercício 2. *Uma linha poligonal fechada é composta por 11 segmentos. Pode uma reta (não contendo uma vértice da linha poligonal) intersectar cada um desses segmentos?*

Exercício 3. *Três bolas de gude, A , B e C, estão no chão. Um movimento permitido é passar uma bola entre as outras duas . É possível, após 25 movimentos, que todas as bolas estejam nas suas posições originais?*

Exercício 4. *Katia e seus amigos estão em um círculo. Sabemos que ambos os vizinhos de cada criança são do mesmo sexo. Determine o número de garotas sabendo que existem 5 garotos no círculo.*

Exercício 5. *(Torneio das Cidades 2002) Um polígono convexo de N lados é dividido em triângulos por diagonais que não se intersectam no interior do polígono. Os triângulos são pintados de preto e branco de modo que quaisquer dois triângulos com um lado em comum têm cores diferentes. Para cada N, ache a maior diferença possível entre a quantidade de triângulos pretos e a quantidade de triângulos brancos.*

Exercício 6. *Um cubo $1 \times 1 \times 1$ está posicionado em um plano quadriculado de modo que uma de suas faces coincide com um dos quadradinhos do plano. Em cada movimento podemos "tombar" o cubo por uma de suas arestas, fazendo coincidir uma face, que tinha essa aresta, com um dos quadradinhos do plano. É possível fazer o cubo voltar a sua posição inicial após 2005 movimentos?*

Particionando em Pares

Exercício 7. *Podemos desenhar uma linha poligonal fechada feita por 9 segmentos de reta, cada um deles intersectando exatamente outro segmento?*

Solução. *Se tal construção é possível, então todos os segmentos podem ser agrupados em pares de segmentos intersectantes. Mas o número de segmentos é ímpar!Absurdo!*

A idéia importante neste exemplo é: um conjunto que pode ser agrupado em **pares** *tem uma quantidade par de elementos.*

Exercício 8. *Dado que um polígono regular de 101 lados tem um eixo de simetria, mostre que esse eixo passa por um de seus vértices. O que você pode dizer sobre um polígono de 100 lados com a mesma propriedade?*

Os próximos dois problemas tratam de dominós. Um dominó consiste de um tabuleiro 1×2 com pontos em cada casinha. A quantidade de pontos varia de 0 até 6. Então, o número total de dominós distintos é 28.

Exercício 9. *Todos os dominós são arranjados em uma cadeia de duas pontas (a quantidade de pontos na extremidade de dois dominós consecutivos é a mesma). Se em uma ponta existe o número 5, qual é o número da outra ponta?*

Exercício 10. *Em um conjunto de dominós, descartarmos todos aqueles que possuem pelo menos uma casinha vazia. É possível arranjarmos todos os restantes em uma cadeia?*

Exercício 11. *Vinte e cinco peças são colocadas em um tabuleiro* 25×25 *de modo que suas posições são simétricas com respeito a uma diagonal. Mostre que pelo menos uma das peças está sobre esta diagonal.*

Exercício 12. *(Eslovênia 1992) Prove que para quaisquer inteiros positivos* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *o número:*

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_n - a_1|$$

é par.

Par e Ímpar

Exercício 13. *Podemos trocar uma nota de 25 reais usando dez notas que podem assumir os valores* $1, 3, 5$*?*

Solução. *Não. Como a soma de um número par de números ímpares é par. A somas dessas 10 notas só pode ser um número par. Mas 25 é ímpar.*

Exercício 14. *Peter comprou um caderno com 96 folhas, e numerou com os números de 1 até 192. Victor rasgou 25 folhas consecutivas do caderno, e adicionou os 25 números. Victor pode ter obtido o número 1990 como resultado da soma?*

Exercício 15. *Prove que a igualdade* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$ *não tem admite soluções com todos os números sendo ímpares.*

Exercício 16. *O produto de 22 inteiros é igual a 1. Mostre que sua soma não pode ser zero.*

Exercício 17. *Os números de 1 até 10 são escritos em uma linha. Podemos colocar os sinais* $+$ *e* $-$ *entre eles de modo que o resultdo da expressão resultante seja 0?*

Exercício 18. *Um gafanhoto pula ao longo de uma linha. No seu primeiro pulo, ele anda* $1cm$*, no segundo* $2cm$*, e assim sucessivamente. Ele pode pular para a esquerda ou para a direita. Mostre que após 1985 pulos, o gafanhoto não pode retornar ao ponto em que começou.*

Exercício 19. *Os números* $1, 2, \dots, 1984, 1985$ *são escritos em um tabuleiro. A operção permitida é apagar dois números e colocar sua diferença positiva. Após algumas operações, resta apenas um único número no tabuleiro. Pode este número ser 0?*

Exercício 20. *Pode um tablueiro* 8×8 *ser coberto por com dominós* 1×2 *de modo que somente os quadrados* $a1$ *e* $h8$ *são sejam cobertos?*

Exercício 21. *Um número de 17 dígitos é somado com o seu reverso(um número com os mesmo dígitos mas escritos na ordem inversa). Mostre que sua soma contém pelo menos um dígito par.*

Exercício 22. *Existem 100 soldados em uma quartel, toda noite , três deles ficam de guarda. Após um certo período de tempo, é possível que cada soldado tenha ficado da guarda exatamente uma vez com cada outro soldado?*

Exercício 23. *Quarenta e cinco pontos são escolhidos sobre a reta* AB*, todos fora do segmento de reta* $\overline{AB}$*. Prove que a soma das distâncias desses pontos ao ponto* A *não pode ser igual a soma das distâncas ao ponto* B*.*

Exercício 24. *Nove números são colocados ao redor de um círculo: quatro* $1's$ *e cinco* $0's$*. A seguinte operação é permitida: entre um par de números adjacentes iguais é colocado um 1, e se os números são diferentes, um 0. Os números "velhos"são apagados. Após algumas dessas operações, pode todos os números restantes serem iguais?*

Exercício 25. *Vinte e cinco garotos e vinte e cinco garotas estão sentados ao redor de uma mesa. Prove que é sempre possível encontrar uma pessoa em que ambos os seus vizinhos são garotas.*

Exercício 26. *Três gafanhotos estão brincando ao longo de uma linha. Na sua vez, cada ga fanho to pode pular sobre um outro gafanhoto, mas não sobre os outros dois. Eles podem retornar para suas posições iniciais após 1991 movimentos?*

Exercício 27. *É possível arranjar os números de 1 até 9 em uma sequência, de modo que exista uma quantidade de números ímpares entre 1 e 2, entre 2 e 3 , . . . , e entre 8 e 9?*

Exercício 28. *Em Kracóvia existem apenas 9 casas muito distantes entre si. É possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas?*

Exercício 29. *Um quadrado* 6×6 *é coberto por dominós* 1×2 *sem sobreposição. Prove o quadrado pode ser cortado ao longo de uma reta paralela a um de seus lados de modo que nenhuma das peças seja danificada.*

Exercício 30. *(Ucrânia 1997) Um tabuleiro é colorido de branco e preto da maneira usual, e cada casa contém um inteiro. Sabemos que a soma dos números em cada coluna e a soma dos números em cada linha é par. Mostre que a soma dos números nas casa pretas é par.*

Exercício 31. *(China 1986) É possível arranjar os números* $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, 1986, 1986$ *em fila de modo que entre quaisquer dois* $i's$ *hajam* $(i-1)$ *números?*

Exercício 32. *(Olimpíada de Maio) Determine todos os* n *tais que os* n *primeiros naturias possam ser divididos em dois conjuntos* A *e* B *onde* $A \cap B = \emptyset$ *e a soma dos elementos de* A *é igual a soma dos elementos de* B*.*

Exercício 33. *(Putnam) Seja* B_n *a quantidade de* $n-uplas$ *ordenadas de inteiros positivos* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *tais que*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\frac{1}{a_n}=1$$

Determine se B_{10} *é par ou ímpar.*