Princípio Extremo

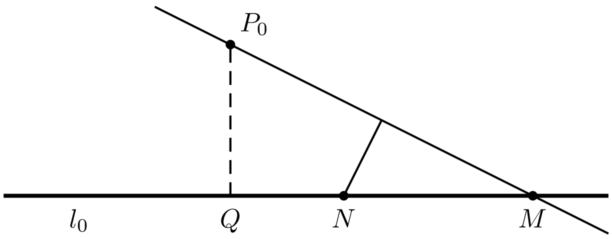
Treinamento Cone Sul 2007

A idéia chave na solução de muitos problemas de combinatória, ou até mesmo em teoria dos números e álgebra é a simples consideração de um elemento extremo (máximo ou mínimo). O próximo problema mostrará como essa idéia pode ser simples e ao mesmo tempo poderosa.

Problema 1. (Leningrado 1988) Alguns pinos estão em um tabuleiro de xadrez. A cada segundo, um dos pinos move para uma casa vizinha (lado em comum). Após muito tempo verificou-se que cada pino havia passado todos todas as casas do tabuleiro exatamente uma vez e tinha voltado para a sua casa inicial. Prove que existiu um momento em que todos os pinos estavam fora de sua casa inicial.

Solução. Seja P o primeiro pino que voltou para a sua posição inicial. Um movimento antes dele voltar para sua casa, cada um dos outros pinos deve ter feito um movimento. De fato, se isso não fosse verdade, P não poderia ter passado por todas as casas do tabuleiro. Desse modo, este será o momento em que todos os pinos estarão em casas diferentes das iniciais. $\square$

Problema 2. (Teorema de Slyverstre) Um conjunto finito S de pontos no plano possui a propriedade que qualquer reta que passa por dois destes pontos também passa por um terceiro. Prove que todos os pontos estão sobre uma reta.



Solução. Seja L o conjunto de todas as retas que passam por pelo menos dois pontos de S. Agora sejam $P_0 \in S$ e $l_0 \in L$ tais que a distância entre P_0 e l_0 é a menor possível porém, diferente de zero. Seja Q a projeção de P_0 sobre l_0. Como a reta l_0 passa por três deles, pelo menos dois deles N e M estão na mesma semi-reta (em relação a Q). Suponha que N é o mais próximo de Q desse modo, a distância entre N e a reta P_0M é menor que a mínima. Contradição. $\square$

Problema 3. (Vietnã 1987) Dado um conjunto de n pontos no plano, nem todos numa mesma reta, existe uma reta que passa por exatamente dois desses pontos.

Problema 4. São dados $n \geq 3$ pontos no plano, nem todos colineares. Mostre que são necessários pelo menos n retas para unir todos os possíveis pares de pontos.

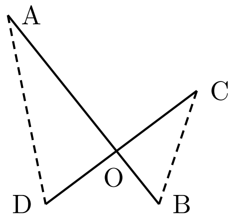
Problema 5. São desenhadas n retas no plano $(n \geq 3)$, não havendo 2 delas paralelas, por todo ponto de interseção de 2 retas, passa pelo menos mais uma reta. Prove que todas as retas passam por um mesmo ponto.

Problema 6. São dados $n \geq 3$ pontos no plano de forma que quaisquer três estão em um triângulo de área menor que 1. Mostre que todos eles estão em um triângulo de área menor que 4.

Problema 7. São dados n pontos no plano. Marcamos então, os pontos médios de todos os segmentos com extremidades nesses n pontos. Prove que há pelo menos $2n - 3$ pontos marcados distintos.

Problema 8. (Putnam 1979) Considere $2n$ pontos no plano escolhidos de modo que quaisquer 3 não são colineares, n deles são pintados de vermelho e n deles são pintados de azul. Prove que é possível parear os pontos usando segmentos ligando cada ponto vermelho a exatamente um ponto azul de modo que esses segmentos não se cortem.

Solução. Existem n^2 maneiras de parearmos esses pontos. É claro que alguns desses pareamentos não cumprem a condição do enunciado. Olhemos em cada pareamento a soma dos seus segmentos. Escolha o pareamento que tem soma mínima. Suponha que nele existem dois segmentos AB e CD que se cortam em O(com A e C vermelhos) $\square$



Pela desiguladade triângular temos: $AO+OD > AD$ e $OB+OC > CB$. Daí $AB+CD > AD+CB$. Logo se trocarmos AB e CD por AD e CB diminuiremos nossa soma. Assim neste pareamento não podemos ter dois segmentos que se cortem.

Problema 9. Há 20 paises em um planeta. Sabe-se que dentre quaisquer três desses países, existe sempre dois sem relações diplomáticas. Prove que existem, no máximo, 200 embaixadas neste platena.

Problema 10. Todo participante de um torneio de vôlei joga com cada um dos outros participantes exatamente uma vez. Após o torneio cada jogador faz uma lista com os nomes de todos os jogadores vencidos por ele e de todos os que foram vencidos pelos jogadores que ele venceu. Sabendo que neste torneio não há empates, prove que existe um jogador cuja a lista possui o nome de todos os outros jogadores.

Solução. Seja A o participante que venceu mais partidas. Considere outra equipe B que venceu A. Observe os jogos entre B e os times que perderam para A. O time B deve ter perdido alguma dessas partidas pois caso contrário ele teria mais vitórias que A. Assim B está na lista de A. Como os times que perderam para A já estão em sua lista então a lista de A contém todas as equipes.

Problema 11. Em um pátio estão localizadas $2n + 1$ pessoas tais que as distância entre quaisquer duas delas são todas distintas. Em um dado momento cada uma delas atira na pessoa mais próxima de si. Prove que:

(a) Pelo menos uma pessoa irá sobreviver.

(b) Ninguém levará mais de cinco tiros.

(c) Os caminhos das balas não se encotram.

(d) Os segmentos formados pelas tragetórias das balas não formam um polígono convexo fechado.

Problema 12. Considere três escolas, cada uma com n alunos. Cada estudante tem ao todo $n + 1$ amigos nas outras duas escolas em que ele não estuda. Prove que é possível selecionar um estudante de cada escola de tal forma que os três se conheçam mutuamente.

Problema 13. Em cada ponto com coordenadas inteiras do plano é colocado um inteiro positivo. Cada um desses números é a média aritmética de seus quatro vizinhos. Mostre que todos os números são iguais.

Problema 14. Cada casa de um tabuleiro 8×8 existe um número que pode ser 0 ou 1. Para cada casa que contém um 0, a soma dos números escritos nas casas que estão ou na mesma linha ou na mesma coluna desta casa é maior que ou igual a 8. Prove que a soma de todos os números no tabuleiro é maior que ou igual a 32.

Problema 15. O parlamento da Bruzundanga consiste de uma casa. Todo membro tem no máximo três inimigos dentre os restantes. Mostre que é possível separar a casa em duas casas de tal forma que cada membro tenha no máximo um inimigo em sua casa.

Problema 16. (Leningrado 1989) Dado um número natural k maior que 1, prove que é impossível colocar os números $1, 2, ..., k^2$ em um tabuleiro $k \times k$ de forma que todas as somas dos números escritos em cada linha e coluna sejam potências de 2.

Problema 17. (Torneio das Cidades 1983) Os números de 1 a 1000 são escritos ao redor de um círculo. Prove que é possível formar 500 segmentos que não se cruzam, cada um ligando dois destes números, e de tal modo que a diferença (em valor absoluto) entre dois números ligados não seja maior que 749.

Problema 18. (Torneio das Cidades 1985) Oito times de futebol participaram de um torneio com apenas uma rodada onde cada time jogou contra todos os outros exatamente uma vez). Não houve empates. Prove que após o termino do torneio é possível escolher quatro times, digamos A, B, C, D tais que A derrotou B, C e D; B derrotou C e D; e C derrotou D.

Problema 19. (URSS 1984) Suponha que $x_1, x_2, \ldots x_n$ $(n \geq 4)$ são inteiros positivos arranjados nessa ordem em torno de um círculo tal que a soma dos vizinhos de cada x_i é um múltiplo de x_i, ou seja,

$$\frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{x_i} = k_i, \text{é um inteiro positivo(onde } x_{n+1} = x_1).$$

Prove que a soma de todos esses inteiros k_i é sempre pelo menos $2n$ mas nunca é maior que $3n$.

Problema 20. (Putnam 1972) Prove que não existe inteiro positivo $n > 1$ tal que $n|2^n - 1$.

Solução. Suponha que exista algum inteiro positivo com essa propriedade. Seja d o menor inteiro positivo satisfazendo $d|2^d - 1$ e $d > 1$. Usando que $mdc(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{mdc(m,n)} - 1$ vale: $mdc(2^d - 1, 2^{\phi(d)} - 1) = 2^k - 1$ onde $k = mdc(\phi(d), d)$. Como $2^{\phi(d)} \equiv 1 \pmod d$ e $2^d \equiv 1 \pmod d$ temos $d|mdc(2^d - 1, 2^{\phi(d)} - 1) = 2^k - 1$. Mas $k|d$ e daí $k|2^k - 1$. Mas isso é um absurdo pois $k \leq \phi(d) < d$(A última desigualdade vem de $d > 1$).

Problema 21. Dados dois inteiros positivos a, m com $mdc(a, m) = 1$ sabemos que existe um inteiro positivo k tal que $a^k \equiv 1 \pmod m$, basta tomar por exemplo $k = \phi(m)$. Considere agora k como sendo o menor inteiro positivo tal que $a^k \equiv 1 \pmod m$(ele é chamado de ordem de a módulo m e é denotado por $ord_m a$). Mostre que se $a^n \equiv 1 \pmod m$ então $k|n$.

Solução. Seja $n = qk + r$ com $0 \leq r < k$. Então $1 \equiv a^n \equiv a^{kq+r} \equiv (a^k)^q a^r \equiv a^r \pmod m$. Como k é o menor inteiro positivo que satisfaz $a^k \equiv 1 \pmod m$ devemos ter $r \geq k$ ou $r = 0$. A única possibilidade é $r = 0$ e daí $k|n$.

Problema 22. (Bulgária 1997) Encontre todos os naturais $m, n \geq 2$ tais que

$$\frac{1 + m^{3^n} + m^{2 \cdot 3^n}}{n}$$

é um inteiro

Problema 23. (Teste Cone Sul 2002) Encontre o período na representação decimal de $\frac{1}{3^{2002}}$.

Problema 24. (Leningrado 1990) Prove que para todos os inteiros $a > 1$ e n , $n|\phi(a^n - 1)$.