Equações Diofantinas

Bruno Holanda e Samuel Barbosa

1 Equações Diofantinas

As equações diofantinas, que recebem esse nome em homenagem ao matemático grego Diofano, são equações com soluções inteiras e geralmente mais de uma variável. Existem várias técnicas para resolver equações diofantinas, algumas das quais iremos abordar neste artigo. Porém, existem algumas idéias que você deve ter sempre em mente na hora de resolver um problema desse tipo:

(i) Observe todas as propriedades das constates inteiras da equação. Tente usá-las a seu favor.

(ii) Use desigualdades sempre que possível. Elas podem reduzir drasticamente o conjunto das prováveis soluções.

(iii) Pense em casos particulares, a partir deles você pode ter uma idéia geral da solução.

(iv) Use e abuse do mdc. E também não se esqueça do teorema de Bèzout.

2 Equações Diofantinas Lineares

Problema 1. *Determine todas as soluções inteiras de* $2x + 3y = 5$.

Solução. *Como 5 é ímpar e* $2x$ *é par devemos ter* $3y$ *ímpar. Então* $y = 2y_0 + 1$. *Daí* $x = \dfrac{5-(2y_0+1)}{2} = 2 - y_0$. *Assim todas as soluções da equação são da forma* $(x, y) = (2 - y_0, y_0)$

É bem simples descobrir a resposta da pergunta anterior para equações gerais como mostra a próxima proposição:

Proposição 1. *A equação* $ax + by = c$, a, b, c *inteiros, tem uma solução nos inteiros* x *e* y *se, e somente se,* $mdc(a, b) = d$ *divide* c. *Entretanto, se* (x_0, y_0) *é uma solução inteira, então para cada inteiro* k, *os valores*

$$x' = x_0 + \frac{bk}{d},$$

$$y' = y_0 - \frac{ak}{d},$$

são soluções, e todas as soluções inteiras da equação são dessa forma.

Problema 2. *Encontre todas as soluções inteiras da equação* $21x + 48y = 6$.

Problema 3. *Resolva a equação* $2x + 3y + 5z = 11$ *nos inteiros.*

Problema 4. *(*Rússia 95*) Sejam* m *e* n *interios positivos tais que* $mmc[m, n]+mdc[m, n] = m+n$. *Prove que um deles é divisível pelo o outro.*

Solução. *Seja* $d = mdc(m, n)$ *então* $m = dm_0, n = dn_0$ *com* $mdc(m_0, n_0) = 1$. *Então a equação dada corresponde à* $dm_0n_0 + d = dm_0 + dn_0$, *ou seja,* $d(m_0 - 1)(n_0 - 1) = 0$. *Se* $m_0 = 1$ *temos* $m_0 = d|n$ *e se* $n_0 = 1$ *temos* $n = d|m$.

Problema 5. *Encontre todas as soluções inteiras de* $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$.
(Dica: Olhe o mdc de x, y *e* z *)*

Problema 6. *(*Torneio das Cidades 1997*) Sejam* a *e* b *inteiros positivos. Se* $a^2 + b^2$ *é divisível por* ab, *prove que* $a = b$.

Problema 7. (Estonia 2005) *Sejam* a *e* b *inteiros positivos primos entre si tais que* $\dfrac{a+b}{a-b}$ *também seja um inteiro positivo. Prove que pelo menos um dos números* $ab + 1$ *e* $4ab + 1$ *é um quadrado perfeito.*

3 Fatoração

Nesta seção vamos por em prática todas as técnicas que apredemos nas aulas de produtos notáveis.

Problema 8. *Prove que a equação $2^n + 1 = q^3$ não admite soluções em inteiros positivos n e q.*

Solução. *É facil ver que para $n = 1, 2, 3$ a equação não admite soluções. Fatorando obtemos: $(q-1)(q^2+q+1) = 2^n$. Como $q - 1 | 2^n$ devemos ter $q = 2$ ou $q = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Claramente $q = 2$ não produz solução. Se $q = 2k+1$ temos $2^n = 8k^3+12k^2+6k$. Como $n > 3$, $8|2^n$. Se k é ímpar $8k^3+12k^2+6k$ não é múltiplo de 8. Se k é par $8k^3+12k^2+6k = \underbrace{2k}_{P}\underbrace{(4k^2+6k+3)}_{P+P+I=I} = 2^n$. Então $P \cdot I = 2^n$. Uma potência de 2 nunca possui um fator ímpar maior que 1 em sua fatoração. Logo a equação $2^n + 1 = q^3$ não admite solução. (P=Par, I=ímpar)*

Problema 9. (URSS 1991) *Encontre todas as soluções inteiras do sistema:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} xz - 2yt & = & 3 \\ xt + yz & = & 1. \end{array}\right. \tag{1}$$

Solução. *Olhando para o sistema (1) podemos ver que ele não é fácil de fatorar. Quando isso acontece, uma boa estratégia que podemos tomar é aplicar alguma transformação algébrica: somar as equações, multiplicá-las, somar um fator de correção e outras. Neste caso, vamos aplicar uma transformação bem interessante: vamos elevar ambas equações ao quadrado.*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2z^2 - 4xyzt + 4y^2t^2 & = & 9 \\ x^2t^2 + 2xytz + y^2z^2 & = & 1. \end{array}\right.$$

Multiplicando a segunda por dois e somando com a primeira, temos:

$$x^2(z^2+2t^2) + 2y^2(z^2+2t^2) = 11 \quad \Rightarrow \quad (x^2+2y^2)(z^2+2t^2) = 11.$$

Como cada uma das parcelas é não negativa, podemos analisar apenas dois casos:

$$(i)\left\{\begin{array}{lcr} x^2+2y^2 & = & 11 \\ z^2+2t^2 & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y,z,t) = (\pm 3, \pm 1, \pm 1, 0).$$

$$(ii)\left\{\begin{array}{lcr} x^2+2y^2 & = & 1 \\ z^2+2t^2 & = & 11 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y,z,t) = (\pm 1, 0, \pm 3, \pm 1).$$

Logo, as única soluções possíveis são $(x,y,z,t) = (\pm 1, 0, \pm 3, \pm 1)$ e $(x,y,z,t) = (\pm 3, \pm 1, \pm 1, 0)$.

□

Problema 10. (Irlanda 1997) *Ache todos os pares (x, y) de inteiros tais que $1+1996x+1998y = xy$.*

Problema 11. *Ache todas as soluções inteiras de $x(y+1)^2 = 243y$.*

Problema 12. (OBM 2001) *Mostre que não existem dois inteiros a e b tais que $(a+b)(a^2+b^2) =$* 2001.

Problema 13. (Eslovênia 2005) *Ache todas as soluções inteiras e positivas da equação $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$.*

Problema 14. (IMO 2006) *Ache todas as soluções inteiras da equação*

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 15. *Seja $p > 5$ um primo. Prove que a equação $x^4 + 4^x = p$ não tem solução inteira.*

Problema 16. *Encontre todas as soluções de $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$ em inteiros x, y.*

Problema 17. *Encontre todos os números naturais n tais que $2^8+2^{11}+2^n$ é um quadrado perfeito.*

Problema 18. *(Alemanha 95) Encontre todos os pares de inteiros não negativos (x, y) tais que $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$.*

Problema 19. *(*Reino Unido 1995*) Encontre todas as triplas de inteiros positivos (a, b, c) tais que*

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 2$$

4 Analisando módulo m

A vantagem de analisar uma equação sobre $\mathbb{Z}_m$ é quase uma questão de cardinalidade. Como o conjunto $\mathbb{Z}$ é infinito, temos um número infinito de prováveis soluções para uma equação diofantina. Por outro lado, $\mathbb{Z}_m$ é um grupo finito de m elementos. Ou seja, "podemos testar todas as soluções" (mesmo que esteja estre aspas).

Problema 20. (Austrália 1983) *Prove que a equação $x^4+131=3y^4$ não tem soluções inteiras.*

Solução. *Analisando módulo 5, pelo teorema de Fermat temos que $x^4 \equiv 0$ ou 1. Porém, $x^4 \equiv 0 \Rightarrow y^4 \equiv 2$ e $x^4 \equiv 1 \Rightarrow y^4 \equiv 4$. Logo, a equação não tem solução.* □

Você deve estar se perguntando: Como vou saber que módulo usar?. E a resposta é: Não sabe! Saia testandando! Em muitos problemas, testamos até mais de quatro módulos diferentes até achar o certo. Mas, aqui vão algumas dicas:

(i) *Os módulos mais usados são p, com p primo, e potências de 2.*

(ii) *Sempre que a equação tiver um expoente p, $p-1$ ou $\frac{p-1}{2}$, tente usar módulo p. E não se esqueça do pequeno teorema de Fermat: $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, quando $(x,p)=1$.*

Problema 21. (Rioplatense 2000) *Encontre todas as soluções inteiras positivas da equação*

$$1+2^x+3^y=z^3.$$

Solução. *Testando alguns casos iniciais podemos conjecturar que a única solução possível é $(x,y,z)=(2,1,2)$. Dessa forma, uma boa idéia nesse caso é testar módulos 8 e 9. Se supormos*

Problema 22. (USAMO 1979) *Determine todas as inteiras não-negativas da seguinte equação:*

$$n_1^4+n_2^4+\cdots+n_{14}^4=1599.$$

Problema 23. *Encontre todas as soluções da equação diofantina $x^2+y^2=1000003$*

Problema 24. (Balkan 1998) *Prove que a equação $x^5-4=y^2$ não tem solução inteira.*

Problema 25. (Balkan 2004) *Encontre todas as soluções (x,y) da equação*

$$x^y-y^x=xy^2-19,$$

onde x e y são números primos.

Problema 26. (Bielorussia 1998) *Existem inteiros x e y tais que $3x^2-2y^2=1998$.*

Problema 27. (Alemanha 1997) *Determine todos os primos p tais que o sistema*

$$\begin{cases} p+1=2x^2 \\ p^2+1=2y^2, \end{cases}$$

tenha solução nos inteiros x, y.

Problema 28. *Prove que não existem inteiros x e y tais que $15x^2-7y^2=9$.*

Problema 29. *Mostre que $x^2+3xy-2y^2=122$ não tem soluções em inteiros.*

Problema 30. *Encontre todas as soluções inteiras de $|3^m-2^n|=1$*

Problema 31. (Índia 95) *Encontre todos os inteiros positivos x, y tais que $7^x-3^y=4$.*

Problema 32. (Índia 95) *encontre todos as soluções inteiras positivas x, y, z, p, com p primo, da equação $x^p+y^p=p^z$*

Problema 33. (Rússia 95) *Encontre todos os primos p tais que o número p^2+11 tem exatamente seis diferentes divisores (incluindo 1 e o próprio número).*

Problema 34. *Mostre que não existe número natural d tal que os números $2d-1, 5d-1$ e $13d-1$ sejam quadrados perfeitos.*

Problema 35. (Putnam 1992) *Para um dado inteiro positivo m, encontre todas as triplas (n,x,y) de inteiros positivos, com $mdc(n,m)=1$, que satisfazem*

$$(x^2+y^2)^m=(xy)^n.$$

Problema 36. *Prove que não existe inteiro n tal que n^2+3n+4 seja divisível por 49.*

Problema 37. *Prove que a equação $x^2=3y^2+8$ não tem soluções inteiras (x,y).*

Problema 38. *Encontre todas as soluções em inteiros não negativos a, b, c da equação*

$$3^a + 1 = 5^b + 7^c.$$

Problema 39. *Mostre que não existem inteiros a, b, c para os quais $a^2 + b^2 - 8c = 6$.*

Problema 40. *Mostre que a equação diofantina $5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1988$ não tem solução.*

Problema 41. *Seja n um inteiro. Prove que se $2+2\sqrt{28n^2+1}$ é um inteiro, então é um quadrado perfeito.*

Problema 42. *(*Bulgária 95*) Encontre todos os pares de inteiros (x, y) para os quais $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ é um inteiro que divide 1995.*

5 Descida de Fermat

Problema 43. *Prove que a seguinte equação não possui soluções inteiras positivas:*

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2xyzw. \tag{2}$$

Solução. *Vamos supor que (2) possui pelo menos uma solução não-trivial. Seja (x_0, y_0, z_0, w_0) uma dessa soluções. Note que se x_0, y_0, z_0, w_0 forem todos ímpares teremos do lado esquerdo um número múltiplo de quatro, mas do lado direito não. Se apenas um ou três deles for(em) par(es) teremos o lado esquerdo ímpar e o direito par. Se dois deles forem pares e dois forem ímpares, do lado direito teremos um múltiplo de quatro, mas do esquerdo não. Desse modo, devemos x_0, y_0, z_0, w_0 pares. Ou seja, $x_0 = 2x_1$, $y_0 = 2y_1$, $z_0 = 2z_1$ e $w_0 = 2w_1$. Substituindo em (2) e dividindo por quatro, temos:*

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 = 8x_1y_1z_1w_1.$$

De modo análogo, devemos ter $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$ e $w_1 = 2w_2$ e:

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + w_2^2 = 32x_2y_2z_2w_2.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_0/2^n$, $y_0/2^n$, $z_0/2^n$, $w_0/2^n$ devem ser inteiros. Absurdo, já que os números x_0, y_0, z_0, w_0 possuem um número finito de potências de 2. □

Problema 44. *(*USAMO 1976*) Encontre todas as soluções da equação $a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$ em números naturais a, b, c*

6 Equações de Pell

Vejamos um problema que servirá de motivação para o nosso estudo:

Problema 45. *Sejam F_n e L_n as sequências de Fibonacci e Lucas, respectivamente, definidas por*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ \ \forall\ n \in \mathbb{Z}\ , F_1 = F_2 = 1$$

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1},\ \ \forall\ n \in \mathbb{Z}\ , L_1 = 1, L_2 = 3$$

Mostre que a equação $5x^2 - y^2 = 4$ admite uma solução (x, y) em inteiros positivos se, e somente se, para algum inteiro n, $(x, y) = (F_{2n-1}, L_{2n-1})$.

Solução. *Usando as conhecidas fórmulas:*

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \alpha\beta = 1,\ \alpha + \beta = -1$$

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

É fácil verificar que os pares (F_{2n-1}, L_{2n-1}) são soluções da nossa equação. A parte difícil é mostrar que essas são as únicas soluções! Suponha por absurdo que exitem soluções que não são dessa forma. Seja $S = \{(x, y)\,|x = F_{2n-1}$ e $y = L_{2n-1}\}$. Das soluções que não estão em S, considere uma solução (x, y) com x mínimo. Veja que x e y tem mesma paridade, assim $\dfrac{3x-y}{2}$ e $\dfrac{3y-5x}{2}$ são inteiros. Mostraremos que o par $\left(\dfrac{3x-y}{2}, \dfrac{3y-5x}{2}\right)$ também é solução. Se $3x \leq y \Rightarrow 9x^2 \leq y^2 = 5x^2 - 4 \Rightarrow x^2 \leq -1$. Absurdo! Logo $3x - y > 0$. Analogamente se prova que

$3y-5x>0$. *Usando as duas desigualdades anteriores temos* $\frac{3x-y}{2}<x$. *Se mostrarmos que o par* $\left(\frac{3x-y}{2},\frac{3y-5x}{2}\right)$ *é solução da equação, deveremos ter* $\left(\frac{3x-y}{2},\frac{3y-5x}{2}\right)\in S \Rightarrow \frac{3x-y}{2}=F_{2n-1}$ *e* $\frac{3y-5x}{2}=L_{2n-1}\Rightarrow x=F_{2n+1}$ *e* $y=L_{2n+1}\Rightarrow (x,y)\in S$. *Absurdo! Veja que :*

$$5\left(\frac{3x-y}{2}\right)^2-\left(\frac{3y-5x}{2}\right)^2=\frac{20x^2-4y^2}{4}=4$$

Assim todas as soluções estão em S, *isto termina a prova.*

Problema 46. (Vietnã 1999) *A sequência* a_n *é definida por* $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$. *A sequência* b_n *é definida por* $b_1=1,\ b_2=4,\ b_{n+2}=3b_{n+1}-b_n$. *Mostre que os inteiros positivos* (a,b) *satisfazem* $5a^2-b^2=4$ *se, e somente se,* $(a_n,b_n)=(a,b)$.

Veja que encontramos uma familía infinta de soluções para o problema anterior. Curiosamente esta familia satisfaz uma recorrência linear bem simples. Note ainda que $\sqrt{5}$ apareceu na fórmula que encontramos para F_{2n+1} e L_{2n+1}. Será que tudo isso foi coincidência? Nosso próximo objetivo será estudar mais detalhadamente equações como a do problema anterior.

A equação $x^2-dy^2=N$, com d e N inteiros positivos nas variáveis x e y é chamada de equação de Pell. Jonh Pell contribuiu muito pouco para a análise desta equação, ela recebeu seu nome apenas por um engano de Euler. Lagrage foi o primeiro a provar que $x^2-dy^2=1$ tem infinitas soluções em inteiros se d é um interio positivo fixo que não é um quadrado perfeito. Estaremos interessados em descrever todas as possíveis soluções desta equação , caso possua, e tentar obter alguns critérios para dizer quando ela não tem solução. Trataremos apenas do caso em que d não é um quadrado perfeito. O outro caso é deixado como exercício para o leitor. A próxima proposição é um conhecido exercício do princípio da casa dos pombos:

Proposição 2. *Se* ξ *é um número irracional então existem infinitos números racionais* $\frac{x}{y}$, *com* $mdc(x,y)=1$ *tais que* $\left|\xi-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{y^2}$

Prova. *Particionemos o intervalo* $[0,1)=[0,1/n)\cup[1/n,2/n)\ldots\cup[(n-1)/n,1)$. *Consideremos as partes fracionárias de* $0,\xi,2\xi,\ldots,n\xi$. *Segue do princípio da casa dos pombos que existem* $0\le k<j\le n$ *(lembre-se que* $0\le\{x\}<1$*) tais que* $\{k\xi\}$ *e* $\{j\xi\}$ *pertencem a um mesmo intervalo. Então* $|\{j\xi\}-\{k\xi\}|<\frac{1}{n}$. *Daí,* $|(j-k)\xi-(\lfloor j\xi\rfloor-\lfloor k\xi\rfloor)|<\frac{1}{n}$. *Sejam* $x=\lfloor j\xi\rfloor-\lfloor k\xi\rfloor$ *e* $y=j-k$. *Assim,* $\left|\xi-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{ny}$. *Seja* $d=mdc(x,y)\Rightarrow x=x'd,\ \ y=y'd,\Rightarrow\left|\xi-\frac{x'}{y'}\right|=\left|\xi-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{ny}<\frac{1}{y^2}<\frac{1}{y'^2}$. *Para obter infinitas soluções, note que* $\left|\xi-\frac{x}{y}\right|\neq 0$, *então existe um inteiro* m *tal que* $m>\frac{1}{|\xi-x/y|}$. *Se repetirmos o que fizemos acima com o inteiro* m, *obtemos um par de inteiros* (x_1,y_1) *com* $mdc(x_1,y_1)=1$, *tais que* $\left|\xi-\frac{x_1}{y_1}\right|<\frac{1}{my_1}<\left|\xi-\frac{x}{y}\right|$ *e* $0<y_1<m$. *(Veja que* $\frac{x_1}{y_1}$ *é uma aproximação de* ξ *melhor que* $\frac{x}{y}$ *e podemos obter novas aproximações quantas vezes quisermos).*

Proposição 3. *Se* d *é um inteiro positivo livre de quadrados, i.e., não existe* $k>1$ *tal que* $k^2|d$, *então existe uma constantre* M *tal que* $\left|x^2-dy^2\right|<M$ *tem infinitas soluções* (x,y) *nos inteiros positivos.*

Prova. *É claro que se* d *é um inteiro livre de quadrado então* $\sqrt{d}$ *é irracional. Sabemos que existem infinitos pares de inteiros* (x,y), *com* $y>0$ *e* $mdc(x,y)=1$ *tais que :* $|x-y\sqrt{d}\,|<\frac{1}{y}$. *Segue que* $|x+y\sqrt{d}|<|x-y\sqrt{d}|+2y\sqrt{d}$. *Então* $|x^2-dy^2|<|1/y+2y\sqrt{d}|1/y<2\sqrt{d}+1$.

Teorema 1. *Se* d *é um inteiro positivo livre de quadrados então* $x^2-dy^2=1$ *tem infinitas soluções nos inteiros. Existe uma solução* (x_1,y_1) *tal que toda solução tem a forma* $\pm(x_n,y_n)$ *onde* $x_n+y_n\sqrt{d}=(x_1+y_1)^n$.

Prova. *Pela proposição 2, existem infinitos pares de inteiros* (x,y) *tais que* $|x_2-dy_2|<M$. *Deve existir um inteiro* m *tal que a equação* $|x_2-dy_2|=m$ *tenha solução para infinitos pares de inteiros* (x,y). *Analisando módulo* m, *cada componente destes infinitos pares, como existe apenas um número finito de possibilidades de combinações de restos módulo* m, *devem existir pares* (x_1,y_1) *e* (x_2,y_2), *distintos, tais que* $|x_1^2-dy_1^2|=|x_2^2-dy_2^2|=m$ *e* $x_1\equiv x_2 \pmod{m}$ *e* $y_1\equiv y_2 \pmod{m}$. *Sejam* $\alpha=x_1+\sqrt{d}y_1$ *e* $\beta=x_2+\sqrt{d}y_2$. *Suponhamos que* $\beta\le\alpha$. *Seja* $k=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(x_1+\sqrt{d}y_1)}{(x_2+\sqrt{d}y_2)}=$

$\dfrac{(x_1+\sqrt{d}y_1)(x_2-\sqrt{d}y_2)}{m} = \dfrac{(x_1x_2-dy_1y_2)+\sqrt{d}(y_1x_2+y_2x_1)}{m}$. *Sejam* $u = (x_1x_2 - dy_1y_2)/m$ *e* $v = (y_1x_2 + y_2x_1)/m$, *como* $x_1 \equiv x_2 \pmod m$ *e* $y_1 \equiv y_2 \pmod m$ *temos que* u *e* v *são inteiros. É fácil ver que* $u^2 - dv^2 = 1$. *Se* $v = 0$ *temos que* $u = \pm 1$ *então* $\alpha = \pm\beta$, *contrariando nossas hipóteses.*
Diremos que uma solução (u, v) *é maior que uma solução* (x, y) *se* $u+\sqrt{d}v > x+\sqrt{d}y$. *Consideremos a menor solução* α *com* $x > 0$ *e* $y > 0$. *Chamaremos esta de solução fundamental. Consideremos qualquer outra solução* β *de* $x^2 - dy^2 = 1$. *Se* $\beta \neq \alpha^n$, *então existe um* n *tal que* $\alpha^n < \beta < \alpha^{n+1}$ *então* $1 < \beta\alpha^{-n} < \alpha$. *Veja que* $\alpha^{-1} = x - \sqrt{d}y$. *Então* $\beta\alpha^{-n} = A + B\sqrt{d}$ *com* A *e* B *inteiros, veja que* (A, B) *é solução da nossa equação. Como* $A + B\sqrt{d} > 0$ *então* $(A + B\sqrt{d})^{-1} = A - B\sqrt{d} > 0$ *, daí* $2A > 0$ *.Também* $A - B\sqrt{d} = (A + B\sqrt{d})^{-1} < 1$ *então* $B\sqrt{d} > A - 1 \geq 0$ *então* $B > 0$. *Logo* α *não pode ser a solução fundamental. É fácil ver que se* $C + F\sqrt{d} = \beta = \alpha^n$, *então* (C, F) *é solução de* $x^2 - dy^2 = 1$.

Outros Resultados

Para o leitor familiarizado com frações contínuas, basta sabermos as n-ésimas convergências da expansão de $\sqrt{d}$ para determinarmos as soluções de $x^2 - \sqrt{d}y^2 = 1$, como diz a proposição abaixo:

Proposição 4. *Todas as soluções de* $x^2 - \sqrt{d}y^2 = 1$ *podem ser encontradas em* $x_n = h_n$, $y_n = k_n$, *onde* $\dfrac{h_n}{k_n}$ *são as n-ésimas convergências da expansão de* $\sqrt{d}$. *Se* r *é o período da fração contínua da expansão de* $\sqrt{d}$ *temos:*

i) *Se* r *é par então* $x^2 - \sqrt{d}y^2 = -1$ *não tem solução e todas soluções positivas de* $x^2 - \sqrt{d}y^2 = 1$ *são dadas por* $x = h_{nr-1}$, $y = k_{nr-1}$ *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

ii) *Se* r *ímpar então* $x = h_{nr-1}$, $y = k_{nr-1}$ *produzem todas as soluções de* $x^2 - \sqrt{d}y^2 = -1$ *quando* $n = 1, 3, 5, \ldots$., *e todas as soluções de* $x^2 - \sqrt{d}y^2 = 1$ *quando* $n = 2, 4, 6 \ldots$.

Proposição 5. *(*Equação de Pell generalizada*)Consideremos* $ax^2 - by^2 = c$, *onde* a *e* b *não são simultaneamente iguais a 1 e eles também não são divisíveis por nenhum quadrado, então as soluções são obtidas da seguinte maneira: Se* $c = 1$ *, e ambos* a *e* b *são diferentes de 1, determine primeiro a solução fundamental se existir. Todas as outras soluções são obtidas da solução fundamental* (x_0, y_0) *por* $x_n\sqrt{a}+y_n\sqrt{b} = (x_0\sqrt{a}+y_0\sqrt{b})^{2n+1}$. *Se* $c \neq 1$ *, primeiro determine a solução fundamental da equação* $ax^2 - by^2 = 1$. *Se* a *ou* b *é igual a 1, então esta equação tem no máximo um solução fundamental* (x_0, y_0). *Se* (x'_0, y'_0) *é uma solução fundamental de* $ax^2 - by^2 = c$ *todas as outras são obtidas de* $x_n\sqrt{a} + y_n\sqrt{b} = (x_0\sqrt{a} + y_0\sqrt{b})^n(x'_0\sqrt{a} + y'_0\sqrt{b})$. *Se nem* a *ou* b *for igual a 1, as soluções são geradas por* $x_n\sqrt{a} + y_n\sqrt{b} = (x_0\sqrt{a} + y_0\sqrt{b})^{2n}(x'_0\sqrt{a} + y'_0\sqrt{b})$.

Corolário 1. *Suponha que* N *é um inteiro não nulo e que* d *seja livre de quadradados. Se* $x^2 - dy^2 = N$ *tem uma solução, então tem infinitas.*

Proposição 6. *Seja* d *um inteiro que não é um quadrado perfeito, sejam* $\dfrac{h_n}{k_n}$ *as n-ésimas convergências da expansão em fração contínua de* $\sqrt{d}$. *Seja* N *um inteiro tal que* $|N| < d$. *Então qualquer solução positiva de* $x = s, y = t$ *de* $x^2 - \sqrt{d}y^2 = N$ *com* $mdc(s, t) = 1$ *satisfaz* $s = h_n$, $t = k_n$ *para algum* n.

Problema 47. *Encontre todos os triângulos cujos lados são inteiros consecutivos e cuja área seja um número inteiro.*

Solução. *Sejam* $a = n - 1, b = n, c = n + 1$ *os lados do triângulo. Pela fórmula de Heron, a área do triângulo é*

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} = \frac{n}{4}\sqrt{3(n^2-4)}.$$

Para A *ser inteiro devemos ter* n *par e que a expressão no radicando seja um quadrado perfeito. Trocando* n *por* $2x$ *e* A/n *por* m *obtemos a equação Diofantina* $3x^2 - 3 = m^2$. *Veja que* m *deve ser divisível por 3, digamos* $m = 3y$. *Então* $x^2 - 3y^2 = 1$ *que é uma equação de Pell. É fácil ver que* $(u_0, v_0) = (2, 1)$ *é a solução fundamental. Todas as outras soluções são geradas pela recorrência* $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n, v_{n+1} = u_n + 2v_n$. *Os triângulos procurados são os que têm lados de medidas* $2u_n - 1, 2u_n$ *e* $2u_n + 1$ *cuja área é* $3u_nv_n$.

Problema 48. *Encontre o menor inteiro positivo* n *tal que* $19n + 1$ *e* $95n + 1$ *são ambos quadrados perfeitos.*

Solução. *Seja* $95n + 1 = y^2$ *e* $19n + 1 = x^2$. *Então* $5x^2 - y^2 = 4$*(Nosso problema 18!), que é uma equação de Pell generalizada. As soluções desta equação são dadas por*

$$\frac{y_n \pm x_n\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^n \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Usando a fórmula da sequência de Fibonacci concluímos que $x_m = F_{2m-1}$. O primeiro termo da sequência de Fibonacci da forma F_{2m-1} que é congrunte a 1 módulo 19 é $F_{17} = 1597$. A resposta do problema é

$$n = \frac{1}{19}(F_{17}^2 - 1) = 134232.$$

Problema 49. *Para qualquer $n > 1$, encontre n pontos no plano de modo que não existam três colineares e que a distância entre quaisquer dois deles seja um inteiro.*

Solução. *Como a equação de Pell $x^2 - 2y^2 = -1$ admite a solução $(1,1)$ pelo corolário 1 ela admitirá infinitas soluções. Podemos usar essas soluções para produzirmos os inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfazendo as condições:*

I $a_i^2 + 1 = 2b_i^2, i = 1, 2, ..., n$

II $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

Defina os pontos $P_i = (2a_i/(a_i^2+1), (a_i^2-1)/(a_i^2+1)), i = 1, 2, ..., n$ É fácil ver que a distância entre quaisquer dois pontos distintos é um número racional. Seja k o mínimo múltiplo comum de todos os denominadores de todas as frações que representam as distâncias entre dois pontos P_i's (Claramente existe um número finito de distâncias). Aplicando uma homotetia de razão k, as novas distâncias passarão a ser números inteiros. Como todos os pontos P_i's estão sobre um círculo de raio 1, não existem três colineares. Problemas relacionados: IMO 1975/5, IMO 1987/5.

Problema 50. *Prove que $x^2 - dy^2 = -1$ não tem solução se d é divisível por um primo $p \equiv 3 \pmod 4$.*

Problema 51. *Seja d um inteiro positivo, que não seja um quadrado. Se k é qualquer inteiro positivo, prove que existem infinitas soluções em inteiros positivos de $x^2 - dy^2 = 1$ com $k|y$*

Problema 52. *Prove que $n^2 + (n+1)^2$ é quadrado perfeito para infinitos valores inteiros de n*

Problema 53. *Mostre que para qualquer inteiro positivo k, $x^2 - (k^2-1)y^2 = -1$ não tem solução nos inteiros.*

Problema 54. *Mostre que se $p \equiv 1 \pmod 4$ então a equação $x^2 - dy^2 = -1$ tem solução.*

Problema 55. *(*Banco IMO 2002*) Existe um inteiro positivo m tal que a equação*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = \frac{m}{a+b+c}$$

tem infinitas soluções em inteiros positivos a, b, c ?

Problema 56. *Determine todos os pares (k, n) de inteiros positivos tais que $1 + 2 + \ldots + k = (k+1) + (k+2) + \ldots + n$.*

Problema 57. *Encontre todos os números da forma $m(m+1)/3$ que são quadrados perfeitos.*

Problema 58. *Encontre todos os número os triangulares que são quadrados perfeitos.*

Problema 59. *Resolva a equação $(x+1)^3 - x^3 = y^2$ em inteiros positivos.*

Problema 60. *Encontre todos os inteiros positivos n para os quais ambos $2n+1$ e $3n+1$ são quadrados perfeitos. Prove que todos esses interios são divisíveis por 40.*

Problema 61. *Prove que se n ém um inteiro positivo com a propriedade que ambos $3n+1$ e $4n+1$ são quadrados perfeitos, então n é divisível por 56.*

Problema 62. *Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que $n^2 + 1$ divide $n!$.*

Problema 63. *Prove que a equação*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

admite infinitas soluções nos inteiros positivos.

Problema 64. *(*BKMO TST 2004*) Encontre todos os inteiros positivos n para os quais existem inteiros positivos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Problema 65. *(*Vietnã 1992*) Enontre todos os pares de inteiros positivos (x, y) satisfazendo a equação:*

$$x^2 + y^2 - 5 \cdot x \cdot y + 5 = 0.$$

Problema 66. *Encontre todos os números naturias n tais que $n+1$ e $3n+1$ são simultaneamente quadrados perfeitos.*

Problema 67. *Encontre todas as soluções dos números naturais m, n que satisfazem a equação:*

$$1+2+3+\ldots+n=m^2$$

Problema 68. *(*IMO LongList 1967*) Qual fração $\frac{p}{q}$, onde p, q são inteiros positivos menores que 100, é a mais próxima de $\sqrt{2}$? Encontre todos os dígitos após a vírgula da representação decimal desta fração que coincidam com os dígitos da representação decimal de $\sqrt{2}$.*

Problema 69. *(*IMO Shortlist 2003*) Seja b um inteiro maior que 5. Para cada inteiro positivo n, considere o número*

$$x_n = \underbrace{11\cdots1}_{n-1}\underbrace{22\cdots2}_{n}5,$$

escrito na base b. Prove que a seguinte condição é verdadeira se, e somente se, $b=10$: existe um inteiro positivo M tal que para cada inteiro n maior que M, o número x_n é um quadrado perfeito.

Problema 70. *(*Torneio das Cidades 1997*) Prove que a equação $x^2+y^2-z^2=1997$ tem infinitas soluções nos inteiros x, y e z.*

Problema 71. *(*Irlanda 95*) Determine com prova todos os inteiros a tais que a equação $x^2+axy+y^2=1$ tenha infinitas soluções em inteiros positivos distintos (x, y).*