

---

# Invariantes

BRUNO HOLANDA

---

◆ Neste artigo vamos estudar o princípio da invariância. Ou seja, vamos resolver problemas que, dada uma transformação, existe uma propriedade associada que nunca muda.

## 1 Analisando as invariantes

**Ex:** Nove casas  $1 \times 1$  de um tabuleiro  $10 \times 10$  estão infectadas. A cada segundo, uma casa que possui duas casas vizinhas (com um lado em comum) infectadas também se torna infectada. É possível todas as casas se tornarem infectadas?

**Solução.** Note que o perímetro da área infectada nunca aumenta. Inicialmente, temos um perímetro que é no máximo  $4 \times 9 = 36$  e o perímetro do tabuleiro todo é  $4 \times 10 = 40$ . Logo, é impossível que o tabuleiro fique todo infectado.

*Dica:* Quando você se deparar com um problema que usa algum tipo de transformação, a primeira coisa que você deve ter em mente é usar invariantes.

**Ex:** Cada um dos números  $a_1, a_2, \dots, a_n$  é 1 ou  $-1$ , e temos que:

$$S = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + \dots + a_n a_1 a_2 a_3 = 0$$

Prove que  $4 \mid n$ .

Esse problema parece muito mais com um problema de teoria dos números do que um problema de invariância. Na realidade, como isso pode ser um problema de invariância se, não temos nenhuma transformação? Não seja por isso! Podemos criar nossas próprias transformações!

**Solução.** Nosso movimento será o seguinte: “trocar  $a_i$  por  $-a_i$ ”. Fazendo essa operação, a congruência de  $S$  módulo 4 é invariante pois, trocam de sinal exatamente quatro parcelas de  $S$ . Assim, basta trocar todos os  $a_i$ 's que forem  $-1$  por 1. Portanto  $0 \equiv S \equiv 1+1+\dots+1 \equiv n \pmod{4} \Rightarrow 4 \mid n$ .  $\square$

Outra maneira de se construir invariantes é através de energias. Os alunos que estudam física sabem muito bem que “a energia total de um corpo é *invariante* em um sistema isolado”. Pois é, vamos usar esse fato que lembra bastante invariantes em prol da matemática. Vamos construir

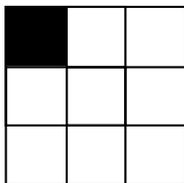
nossas próprias energias e, em seguida, mostrar que ela é invariante.

**Ex:** Em cada um dos dez degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, dando um pulo, ir para outro degrau. Porém, quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã deve pular a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas no mesmo degrau? Justifique.

**Solução.** Vamos dizer que uma rã tem energia  $i$  se ela estiver no  $i$ -ésimo degrau. Por exemplo, uma rã que está no terceiro degrau tem energia 3, se ela pular para o sétimo degrau passará a ter energia 7. Note que a soma das energias de todas as rãs é invariante, i.e, é sempre  $1 + 2 + \dots + 10 = 55$ . Desse modo se em algum momento todas estiverem no mesmo degrau  $x$ , todas também terão energia  $x$ , ou seja  $10x = 55$ . E como  $x \in \mathbb{N}$ , concluímos que é impossível todas ficarem no mesmo degrau.  $\square$

### ◆ Problemas da seção 1 ◆

1. Sete moedas estão sobre uma mesa mostrando a cara. Podemos escolher quaisquer quatro delas e virá-las ao mesmo tempo. Podemos obter todas as moedas mostrando a coroa?
2. Os números  $1, 2, 3, \dots, 1989$  são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois números e escrever sua diferença no local. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Esse número pode ser o zero?
3. Os números  $1, 2, \dots, 20$  são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois deles  $a$  e  $b$  e escrever no lugar o número  $a + b + ab$ . Após muitas operações ficamos apenas com um número. Qual deve ser esse número?
4. Começando com a tripla  $\{3, 4, 12\}$  podemos a cada passo escolher dois número  $a$  e  $b$  e trocá-los por  $0.6a - 0.8b$  e  $0.8a + 0.6b$ . Usando essa operação podemos obter  $\{4, 6, 12\}$
5. Em um tabuleiro  $8 \times 8$  uma das casas está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?
6. Em um tabuleiro  $3 \times 3$  uma das casas do canto está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?



7. Em um tabuleiro  $8 \times 8$  as quatro casas do canto estão pintadas de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

8. Dado um polinômio quadrático  $ax^2 + bx + c$  pode mos fazer as seguintes operações:
- Trocar  $a$  com  $c$ .
  - Tocar  $x$  por  $x + t$  onde  $t$  é um real.
- Usando essas operações é possível transformar  $x^2 - x - 2$  em  $x^2 - x - 1$ ?
9. (*Bulgária 2004*) Considere todas as “palavras” formadas por  $a$ 's e  $b$ 's. Nestas palavras podemos fazer as seguintes operações: Trocar um bloco  $aba$  por um bloco  $b$ , trocar um bloco  $bba$  por um bloco  $a$ . Podemos fazer também as operações ao contrário. É possível obter a seqüência  $\underbrace{baa\dots a}_{2003}$  a partir de  $\underbrace{aa\dots a}_{2003}b$ ?
10. (*Fortaleza 2003*) Sobre uma circunferência tomamos  $m + n$  pontos, que a divide em  $m + n$  pequenos arcos. Nós pintamos  $m$  pontos de branco e os  $n$  restantes de preto. Em seguida, associamos a cada um dos  $m + n$  arcos um dos números  $2, 1/2$  ou  $1$ , dependendo se as extremidades do arco sejam, respectivamente, ambas brancas, ambas pretas ou uma preta e uma branca.
- Calcule o produto dos números associados a cada um dos  $m + n$  arcos.

## 2 Restos como invariantes

Como todo mundo sabe, um bom problema de olimpíada é aquele que mistura a maior quantidade de assuntos diferentes. Nesta seção vamos abordar uma nova utilidade para a teoria dos números (e advinha aonde)!

**(Leningrado 1987).** *As moedas dos países Dillia e Dallia são o diller e o daller, respectivamente. Podemos trocar um diller por dez dallers e um daller por dez dillers. Zequinha possui um diller e deseja obter a mesma quantidade de dillers e dallers usando essas operações. É possível que isso ocorra?*

**Solução.** Seja  $S$  a diferença entre a quantidade de dillers e dallers. Note que a congruência de  $S$  módulo 11 é invariante. Como inicialmente  $S \equiv 1 \pmod{11}$ , não se pode obter a mesma quantia de dillers e dallers. □

### ◆ Problemas da seção 2 ◆

- Seja  $d(x)$  a soma dos dígitos de  $x \in \mathbb{N}$ . Determine todas as soluções de  $d(d(n)) + d(n) + n = 1997$
- (*Torneio das Cidades*) Todo membro de uma seqüência, iniciando do segundo, é igual a soma do termo anterior com a soma de seus dígitos. O primeiro número é 1. É possível que 123456 pertença à seqüência?
- (*Hong Kong 1997*) Cinco números 1, 2, 3, 4, 5 estão escritos em um quadro negro. Um estudante pode apagar dois dos números  $a$  e  $b$  e escrever nos seus lugares  $a + b$  e  $ab$ . Após algumas operações podemos obter a quintupla 21, 27, 64, 180, 540?

14. (TT 1985) Na ilha de Camelot vivem 13 camaleões roxos, 15 verdes e 17 amarelos. Quando dois de cores distintas se encontram, mudam simultaneamente para a terceira cor. Poderia dar-se a situação na qual todos tenham a mesma cor?
15. Em uma fábrica de cartões existem três máquinas. A primeira recebe um cartão  $(a, b)$  e retorna um cartão  $(a + 1, b + 1)$ . A segunda recebe um cartão  $(2a, 2b)$  e retorna um cartão  $(a, b)$ . A terceira recebe dois cartões  $(a, b)$  e  $(b, c)$  e retorna o cartão  $(a, c)$ . Todas as máquinas também retornam o(s) cartão(ões) dados. É possível fabricar um cartão  $(1, 1988)$  se temos inicialmente apenas um cartão  $(5, 19)$ ?
16. Com a calculadora KPK-1991 podemos efetuar duas operações: (a) elevar um número ao quadrado; e (b) obter de um número  $X$  de  $n$  dígitos ( $n > 3$ ) o número  $A + B$ , onde  $A$  é o número formado pelos três últimos de  $X$  e  $B$  o número formado pelos  $(n - 3)$  dígitos de  $X$ . Podemos obter o número 703 a partir de 604 usando essa calculadora?  
Tente usar módulo 37.

### 3 Semi-invariantes

A idéia de *semi-invariante* é um pequena generalização da idéia de invariante. Diremos que uma propriedade é semi-invariante quando ela muda de forma previsível (periodicamente ou sempre crescendo ou decrescendo). Um exemplo bastante comum de semi-invariante é a idade de uma pessoa, que sempre cresce de forma periódica (a cada 365 dias).

**Ex:** Um total de 2000 pessoas estão divididas entre os 115 quartos de uma mansão. A cada minuto, uma pessoa anda para um quarto com número igual ou maior de pessoas do qual ela estava. Prove que eventualmente todas as pessoas vão estar em um mesmo quarto.

**Solução.** Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_{115}$  a quantidade de pessoas nos quartos 1, 2, ..., 115 respectivamente em um dado momento. Defina  $I = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{115}^2$ . Digamos que uma pessoa sai de um quarto com  $n$  pessoas e vai para um quarto com  $m$  pessoas ( $m \geq n$ ). A variação de  $I$  é dada por:

$$\Delta I = ((m + 1)^2 + (n - 1)^2) - (m^2 + n^2) = 2(m - n + 1) > 0$$

Assim, toda vez que uma pessoa muda de quarto o valor de  $I$  cresce. Porém, sabemos que o valor de  $I$  não pode crescer indefinidamente pois, o número de pessoas é finito. Ou seja, em um dado momento  $I$  não poderá mais crescer, isso só acontecerá quando nenhuma pessoa puder mudar de quarto. Logo, todas elas deverão estar no mesmo quarto.  $\square$

#### ◆ Problemas da seção 3 ◆

17. (Leningrado ) Existem  $n \geq 2$  números não-nulos escritos em um quadro. Podemos escolher dois números  $a$  e  $b$  e trocá-los por  $a + b/2$  e  $b - a/2$ . Prove que após feito um movimento não podemos obter os números iniciais novamente.

18. (*Ucrânia 2000*) Existem inicialmente  $n$  números 1 escritos em um quadro. Em cada passo podemos apagar  $a$  e  $b$  e escrever o número  $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$  no seu lugar. Após repetir essa operação  $n - 1$  vezes, prove que o último número escrito não pode ser menor que  $\frac{1}{\sqrt{n}}$
19. (*São Petersburgo 1998*) Um total de 119 anões vivem em uma aldeia com 120 pequenas casas. Uma casa é dita super-habitada se 15 anões ou mais vivem nela. Todo dia, os anões de uma casa super-habitada têm uma briga e se mudam para outras casas da aldeia. Algum dia, necessariamente se encerrará?
20. (*Russia 1997*) Temos uma fileira longa de copos e  $n$  pedras no copo central (copo 0). Os seguintes movimentos são permitidos:

Movimento tipo A:



Se há pelo menos uma pedra no copo  $i$  e pelo menos uma no copo  $i + 1$  podemos fazer uma pedra que está no copo  $i + 1$  pular para o copo  $i - 1$  eliminando uma pedra do copo  $i$ .

Movimento tipo B:



Se há pelo menos duas pedras no copo  $i$  podemos pular uma pedra para o copo  $i + 2$  e outra para o copo  $i - 1$ .

Demonstre o seguinte fato: fazendo os movimentos tipo A ou B durante um tempo suficientemente longo sempre chegamos a uma configuração a partir da qual não é possível fazer nenhum desses dois tipos de movimento. Além disso, essa configuração final não depende da escolha de movimentos durante o processo.

*Dica: Lembre-se de usar energia!*