Combinatória

Samuel Barbosa

28 de março de 2006

1 Princípios Básicos de Contagem

Em contagem, tentamos abordar o problema de contar o número de elementos de um conjunto sem efetivamente contá-los de um por um. Queremos descobrir ferramentas que nos ajudem nessa tarefa. Vejamos um exemplo do tipo de problema que iremos abordar:

Exemplo 1. *De quantos modos podemos colocar 10 garotos e 10 garotas em uma fila de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?*

A resposta para este problema é bem grande! Ao todo temos $2 \times (10!)^2$ maneiras de colocar essas pessoas. Realmente é bastante difícil alguém sair contando de um por um e obter esse valor. Em nosso estudo inicial abordaremos dois tipos bem conhecidos de problemas de contagem:

1. Permutações
2. Combinações

Antes de tratarmos desses famosos problemas, vejamos dois princípios fundamentais para o nosso estudo

Princípio da Adição (PA)

Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_k$, conjuntos disjuntos, dois a dois, tais que $\#E_i = n_i$. Então:
$\#(E_1 \cup E_2 \cup \ldots E_n) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Este princípio diz que, se os eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ são disjuntos e se existem n_1 maneiras do evento E_1 ocorrer, n_2 maneiras do evento E_2 ocorrer, ..., n_k do evento E_k ocorrer, então o número de maneiras de pelo menos um deles ocorrer é $n_1 + n_2 + \ldots n_k$.

Exemplo 2. *Podemos viajar da cidade A para a cidade B por ar (através de 3 linha aéreas) , terra (através de 4 estradas) e água (através de 3 rios). De quantos modos podemos ir de A até B?*

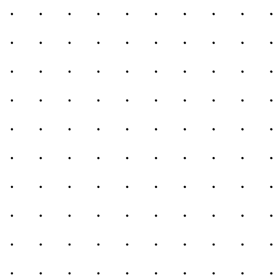
Solução. *Como viajar por ar, água e terra são eventos disjuntos, pelo PA temos* $3 + 4 + 3 = 10$ *modos de fazer a viagem.*

Exemplo 3. *Qual o número de funções* $f : \{1, 2\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *estritamente crescentes?*

Solução. *Seja* A_k *o conjunto das funções em que* $f(1) = k$. *Se* $f(1) = k$ *então* $f(2)$ *pode ser* $k + 1, k + 2, \ldots, n \Rightarrow \#A_k = n - k$. *Claramente* $A_i \cap A_j = \emptyset$. *Pelo PA temos* $\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_{n-1}) = n - 1 + n - 2 + \ldots + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. *Este é o número procurado.*

Exercício 1. *(IME) Qual o número de funções* $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *estritamente crescentes?*

Exercício 2. *Determine o número de quadrados com todos os seus vértices pertencentes a um reticulado de pontos* 10×10.



Exercício 3. *Encontre o número de pares ordenados* (x, y) *de inteiros, tais que* $x^2 + y^2 \leq 5$.

PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO (PM)

Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_k$ conjuntos com $\#E_i = n_i$. Então: $\#(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$.

Se o evento A_1 pode ocorrer de a_1 diferentes maneiras, o evento A_2 pode ocorrer de a_2 diferentes maneiras, ..., o envento A_n pode ocorrer de a_n diferentes maneiras, então o número total de maneiras que o envento A_1 , seguido do evento A_2, ... , seguido do evento A_n ocorrer é $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Exemplo 4. *Quantos números de 5 dígitos existem com todos os seus dígitos ímpares?*

Solução. *Existem 5 números ímpares* $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. *Para escolhermos o primeiro dígito do número, temos 5 maneiras, para o segundo temos 5, ... , para o quinto temos 5 maneiras. Então o número de escolhas possíveis desses cinco dígitos é igual a* $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$.

Exercício 4. *Seja* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ *a fatoração em primos de* n. *Mostre que:*

1. *O número de divisores positivos de* n *é* $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_k + 1)$

2. *O número de pares ordenados de inteiros positivos* (a, b) *tais que* $mmc(a, b) = n$.

Exemplo 5. *Sejam* $X = \{1, 2, \ldots, 100\}$ *e* $S = \{(a, b, c) | a, b, c \in X, a < b \text{ e } a < c\}$. *Encontre* $\#S$.

Solução. *Como* $a < b \Rightarrow a \in \{1, 2, \ldots, 99\}$. *Se* $a = k$ *então temos* $100-k$ *possibilidades para b e c. Assim , pelo PM, o número de ternos* (k, b, c) *é* $(10-k)^2$. *Aplicando o AP encontramos* $\#S = 99^2 + 98^2 + \ldots + 1^2 = 328350$ [1].

Exercício 5. *(OBM) Quantos números de 1 até 1983, podem ser escritos como soma de duas ou mais potências distintas de 3?*

Exercício 6. *Quantas* n*-uplas* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *com* $a_i \in \{-1, 1\}$, $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ *e* $a_1 = 1$ *existem?*

Exercício 7. *Quantos subconjuntos tem um conjunto de* n *elementos?*

Exercício 8. *Quantos subconjuntos de cardinalidade par tem um conjunto de* n *elementos?*

Exercício 9. *Um conjunto* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *é* n*-legal se cada inteiro do conjunto* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *pode ser escrito como uma soma de elementos distintos de* A. *Determine o menor valor possível de* k.

[1]Estamos usando a conhecida fórmula $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercício 10. *(Balcânica 1997) Sejam m e n inteiros maiores que 1. Seja S um conjunto com n elementos, e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ suconjuntos de S. Assuma que para quaisquer dois elementos x e y em S, existe um conjunto A_i tal que ou x está em A_i e y não está em A_i ou x não está em A_i e y está em A_i. Prove que $n \leq 2^m$.*

Exercício 11. *Considere o conjunto $M = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ e seu subconjunto A formado por todos os números da forma $m^2 + k^3$ com m e n naturais. Quem tem mais elementos: A ou $M \backslash A$?*

Exercício 12. *Mostre que existem infinitos inteiros positivos n que não podem ser escritos na forma*

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} + x_5^{13}$$

com $x_1, x_2, \ldots, x_5 \in \mathbb{N}$

2 Permutações

Seja A um conjunto n elementos. De quantos modos podemos escrever os elementos de A em fila? Antes de tentarmos responder esta pergunta, vamos atacar um problema mais geral:

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Para $0 \leq r \leq n$, uma r-permutação de A é o número de maneiras de arranjar quaisquer r elementos de A em uma fila. Quando $r = n$, uma n-permutação de A é simplesmente chamada de permutação. Esse número será denotado por P_r^n

Uma r-permutação de A é formada em r passos.

Número de possibilidades para o primeiro elemento da fila: n
Número de possibilidades para o segundo elemento da fila: $n - 1$
$\vdots$
Número de possibilidades para o r-ésimo elemento da fila: $n - r + 1$

Assim, o número de r-permutaões de um conjunto de n elementos é $P_r^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Observação: Por convenção, $0! = 1$. Veja que $P_0^n = 1$ e $P_n^n = n!$.

Exemplo 6. *Seja $E = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ o alfabeto de 26 letras. Encontre o número de palavras de 5 letras que podem ser formadas de E de modo que a primeira e a última letra sejam vogais, e as três letras restantes sejam consoantes.*

Solução. *Para escolhermos as vogais (em ordem) temos P_2^5 maneiras e para escolhermos as consoantes (em ordem) temos P_3^{21}. Assim, o número de palavras é $P_2^5 \times P_3^{21} = 159600$.*

Exercício 13. *Entre 20000 e 70000, encontre o número de inteiros pares sem dígitos repetidos.*

Exercício 14. *Seja S o conjunto de números naturais cujos dígitos são escolhidos no conjunto $\{1, 3, 5, 7\}$ sem dígitos repetidos. Encontre:*

(i) $\#S$

(ii) $\displaystyle\sum_{n \in S} n.$

3 Permutações Circulares

Agora vamos mudar a pergunta da seção anterior. Suponha que queremos arranjar nossos elemento em um círculo. De quantos modos isso pode ser feito? Consideramos permutações duas iguais, se uma puder ser obtida da outra por uma rotação. Formalmente

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Para $0 \leq r \leq n$, uma r-permutação circular de A é o número de maneiras de arranjar quaisquer r elementos de A em um círculo levando em conta apenas as posições relativas dos elementos. Esse número será denotado por Q_r^n

Vamos começar calculando quantas permutações existem em fila: P_r^n. Podemos colocar cada umas dessas permutações em um círculo formando uma permutação circular como queremos. Podemos estar contando a mesma permutação circular várias vezes. Duas permutações circulares serão iguais se uma puder ser obtida da outra por uma rotação. Agrupemos todas essas permutações circulares em grupos de "permutações iguais". Como cada permutação de r elementos pode ser rotacionada $r-1$ vezes dando origem a outras permutaões equivalentes, cada grupo deve ter r permutaões. Assim, $Q_r^n = \dfrac{P_r^n}{r}$. Em particular, $Q_n^n = (n-1)!$.

Exercício 15. *De quantos modos podemos sentar 5 garotos e 3 garotas ao redor de uma mesa circular se*

(i) não existem restrições?

(ii) O garoto B_1 não pode sentar ao lado da garota G_1?

(iii) Duas garotas não podem sentar adjacentes?

Exercício 16. *Encontre o número de maneiras de sentarmos n casais de namorados ao redor de uma mesa circular em cada um dos seguintes casos:*

(i) Homens e mulheres estão sentados de modo alternado

(ii) Todo homem está do lado de sua namorada.

Problemas

Problema 1. *(AHSME) Nós chamamos um número de telefone $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ de legal se o número $d_1d_2d_3$ é igual a $d_4d_5d_6$ ou a $d_5d_6d_7$. Assuma que cada d_i pode ser qualquer dígito de 0 a 10. Quantos telefones legais existem?*

Problema 2. *(AIME 1996) Dois quadrados de um tabuleiro 7×7 são pintados de amarelo e o resto é pintado de verde. Dois esquemas de cores são equivalentes se um pode ser obtido do outro aplicando uma rotação no plano do tabuleiro. Quantos esquemas de cores não equivalentes podemos obter?*

Problema 3. *(AMC) Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada um de seus oito pés. De quantas maneiras diferentes a aranha pode se calçar admitindo que a meia tem que ser colocada antes do sapato?*

Problema 4. *(AHSME) Nove cadeiras em uma sala irão ser ocupadas por 6 estudantes e 3 professores A, B e C. Os professores chegam antes dos alunos e escolhem suas cadeiras de modo que cada professor sentará entre dois alunos. De quantas maneiras os três professores podem escolher seus lugares?*

Problema 5. *(Torneio das Cidades 1997) Duas pessoas realizam um truque. A primeira retira 5 cartas de um baralho de 52 cartas (previamente embaralhado por um membro da platéia), olha-as, e caloca-as em uma linha da esquerda para a direita: uma com a face para baixo (não necessariamenete a primeira), e as outras com a face para cima. A segunda pessoa deve adivinhar a carta que está com a face para baixo. Prove que elas podem combinar um sistema que sempre torna isto possível.*

Problema 6. *(Colômbia 1998) Considere um tabuleiro* $m \times n$ *e três cores. Desejamos colorir cada segmento do tabuleiro com uma das três cores de modo que cada quadradinho tenha dois lados de uma cor e dois lados de outra cor. Quantas colorações são possíveis?*

Problema 7. *Determine o número de funções* $f : \{1, 2, \ldots, 1999\} \longrightarrow \{2000.2001, 2002, 2003\}$ *satisfazendo a condição de que* $f(1) + f(2) + \ldots + f(1999)$ *é impar.*

Problema 8. *Encontre o número de triplas de conjuntos* (A, B, C) *tais que* $A \cup B \cup C = \{1, 2, \ldots, 2003\}$ *e* $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Problema 9. *(ARML 2001) Calcule o número de conjuntos de três elementos distintos que podem ser escolhidos do conjunto* $\{2^1, 2^2, \ldots, 2^{2000}\}$ *tais que os três elementos formam uma pregressão aritmética crescente.*