Problemas de Combinatória

Larissa Cavalcante

10 de Fevereiro de 2006

1 Pontos e Cores

1. (*Treino Cone Sul 2001*) Sejam $m \geq 2, n \geq 2$ números inteiros. Deseja-se colorir as casas de um tabuleiro $m \times n$ com as cores preta e branca de tal modo que cada casa tenha exatamente duas casas vizinhas da outra cor (casas vizinhas são as que possuem um lado em comum). Determine todos os valores de m, n para os quais é possível fazer tal coloração.

2. (*Tcheca 97*) Cada lado e diagonal de um n-ágono regular ($n \geq 3$) é pintado de vermelho ou azul. Podemos escolher um vértice e trocar a cor de todos os segmentos saindo desse vértice, de vermelho para azul e vice-versa. Prove que não importa como os segmentos são pintados inicialmente, sempre é possível fazer com que o número de segmentos azuis saindo de cada vértice seja par. Prove também que a coloração final é unicamente determinada pela inicial.

3. (*Bulgária 98*) Encontre o menor natural n ($n \geq 3$) com a seguinte propriedade: para qualquer coloração em duas cores de n pontos colineares distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tal que $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-1}A_n$ existem 3 pontos A_i, A_j, A_{2j-i} ($1 \leq i \leq 2j - i \leq n$) que são pintados da mesma cor.

4. (*Bulgária 98*) Os lados e diagonais de um n-ágono regular X são pintados em k cores de maneira que:

   (a) para qualquer cor a e quaisquer dois vértices A, B de X temos que pintamos de a ou AB ou AC e BC, para algum vértice C;

   (b) os lados de qualquer triângulo com vértices em X é pintado de no máximo duas cores.

   Prove que $k \leq 2$.

5. (*Bulgária 98*) Um tabuleiro quadrado $n \times n (n \geq 2)$ é preenchido com 0's e 1's de modo que qualquer subconjunto de n casinhas, sem duas na mesma linha ou coluna, contém pelo menos um 1. Prove que existem i linhas e j colunas com $i + j \geq n + 1$ cujas interseções contém somente 1's.

6. (*EUA 2005*) Dado $n > 1$, seja X um conjunto de $2n$ pontos no plano, sem três colineates. Suponho que n dos $2n$ pontos são pintados de azul, e os n restantes, de vermelho. Uma linha no plano é dita balanceada se passa por um ponto vermelho e um azul e, para cada lado da linha, o númerp de pontos azuis naquele lado é igual ao número de pontos vermelhos nesse mesmo lado. Prove que há pelo menos duas linhas balanceadas.

7. (*Rússia 2005*) São dados $N \geq 3$ pontos enumerados de $1, 2, \ldots, N$. Cada dois números são conectados por uma flecha direcionada do menor para o maior. Uma coloração de todas as flechas de vermelho e azul é dita monocromática se, e somente se, para quaisquer dois números A, B não há dois caminhos monocromáticos de A para B de cores diferentes. Encontre o número de colorações monocromáticas.

2 Sequencias e Permutacoes

1. (*MOSP 2002*) Seja $n \geq 5$ um inteiro positivo, e sejam $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ inteiros satisfazendo as condições:

   (a) os pare (a_i, b_i) são todos distintos para $i = 1, \ldots, n$;

   (b) $|a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i| = 1$ para $i = 1, \ldots, n$, onde $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_1, b_1)$.

   Mostre que existem $1 \leq i, j \leq n$ tais que $1 < |i - j| < n - 1$ e $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$.

2. (*Bulgária 97*) Seja X um conjunto de cardinalidade $n + 1$ ($n \geq 2$). As n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ de elementos distintos de X são chamadas *separadas* se existem índices $i \neq j$ tais que $a_i = b_j$. Encontre o número máximo de n-uplas tais que quaisquer duas são separadas.

3. (*Canada 97*) Dado um número finito de intervalos de tamanho 1 cuja união é o intervalo fechado $[0, 50]$, prove que existe um subconjunto dos intervalos, sendo disjuntos quaisquer dois elementos, cuja união tem pelo menos tamanho 25 (dois intervalos com extremo em comum não são disjuntos).

4. (*Treino Cone Sul 2001*) São dadas n moedas, não necessariamente todas iguais, tais que cada uma pesa um número inteiro de gramas, e que em conjunto pesam $2n$ gramas. Sabe-se que é impossível dividir o conjunto das moedas em dois grupos de mesmo peso. Determinar quanto pesa cada uma das n moedas. Dar todas as possibilidades.

5. (*Bulgária 98*) Para n um dado inteiro positivo, encontre o menor inteiro positivo k para o qual existem k sequências 0-1 de tamanho $2n + 2$, tais que qualquer outra sequência 0-1 de tamanho $2n + 2$ coincide com uma das dadas sequências em pelo menos $n + 2$ posições.

6. (*Seleção IMO 2001*) Para quais $n \in \mathbb{N}$ existe uma permutação $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de (1, 2, ..., n) tal que as diferenças $|x_k - k|$, $\leq k \leq n$, são todas distintas?

7. (*Seleção IMO 2001*) O conjunto S consiste de k sequências, cada uma com n elementos e cujos termos assumem valores 0, 1 ou 2. Para quaisquer duas sequências $(a_i), (b_i)$ de S, podemos construir uma nova sequência (c_i) tal que

   $$c_i = \left\lfloor \frac{a_i + b_i + 1}{2} \right\rfloor, \qquad \text{i}=1, 2, \ldots, n,$$

   e incluí-la em S. Sabe-se que, a partir das sequências iniciais em S, é possível, repetindo a operação acima várias vezes, obter todas as 3^n

sequências com n elementos e termos em $\{0,1,2\}$.
Determine o menor valor possível de k.

8. (*Bulgária 2004*) Numa palavra formada pelas letras a, b podemos trocar alguns blocos: aba em b e vice-versa, bba em a e vice-versa. Se a configuração initial da palavra é $aaa\ldots ab$ onde a aparece 2003 vezes, podemos obter a palavra $baaa\ldots a$, onde a aparece 2003 vezes?

3 Combinatória Geométrica

1. (*Canadá 2003*)S é um conjunto qualquer de n pontos distintos no plano. A menor distância entre dois pontos de S é d. Mostre que há um subconjunto de pelo menos $\frac{n}{7}$ pontos tais que a distância entre quaisquer dois é pelo menos $d\sqrt{3}$.

2. (*Bulgária 97*) Para qualquer natural $n \geq 3$, seja $m(n)$ o número mx́imo de pontos no interior ou na fronteira de um n-ágono regular de lado 1 tal que a distância de quaisquer dois pontos é no maior que 1. Encontre todos os n tais que $m(n) = n$.

3. (*Bulgária 97*) Encontre todos os naturais n para os quais um n-ágono convexo pode ser dividido por diagonais em triângulos com interiores disjuntos de modo que saia um número par de diagonais de cada vértice do n-ágono.

4. (*Tcheca 99*) São dados num plano 1999 triângulos congruentes de área 1, eles são as imagens de um mesmo triângulo sobre differentes translações. Prove que se a interseção de todos esses triângulos é um conjunto M que contém o baricentro de cada um, então M tem área igual a pelo menos $\frac{1}{9}$.

5. (*Treino Cone Sul 2001*) Um quebra-cabeças tem q forma de um retângulo e é montado com 2000 peças que são todos retângulos iguais, e semelhantes ao retângulo grande, de tal modo que os lados dos retângulos pequenos são paralelos aos do grande. O menor lado de cada peça mede 1. Determinar qual é o menor valor possível para a área do retângulo grande.

6. (*Hungria 97*) São dados 111 vetores unitários no plano cuja soma é zero. Mostre que existem 55 vetores cuja soma tem tamanho menor que 1.

7. (*Banco 92*) Seja V um subconjunto finito do espaço euclidiano, consistindo de pontos (x, y, z) com coordenadas inteiras. Sejam V_x, V_y, V_z as projeções de V nos planos yz, zx, xy, respectivamente. Prove que:

$$|V|^2 \leq |V_x| \cdot |V_y| \cdot |V_z|.$$

4 Possibilidades e Probabilidade

1. (*Canada 2001*) Os números $-10, -9, -8, \ldots, 9, 10$ são arrumados numa linha. Cada jogador coloca uma moeda no 0 e joga a moeda 10 vezes. Para cada cara, a moeda é movida uma casa para a esquerda e para cada coroa, a moeda é movida uma casa para a direita. Se pintarmos um ou

mais números de preto e os restantes de branco, encontramos que a chance da moeda acabar num número preto é $\frac{m}{n}$ com $m+n = 2001$. Qual o maior número possível de números pretos?

2. (*Treino Cone Sul 2001*) O cartão da *Loteria Matemática* é um tabuleiro 6×6. O apostador marca seis cruzes em seis casas do cartão e envia ao concurso. O cartão oficial é publicado no jornal, com seis cruzes marcadas que indicam as seis casas perdedoras. O apostador ganha se não marcou nenhuma cruz em uma casa perdedora.

   (a) Demonstre que o jogador pode preencher 9 cartões de modo que pelo menos um deles seja ganhador.

   (b) Demontre que 8 cartões não são suficientes para ter certeza de ganhar.

3. (*China 2001*) Seja $P_1P_2 \dots P_{24}$ um polígono regular de 24 lados inscrito numa circunferência de perímetro 24. Determine a maneira de escolher 8 vértices distintos $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_8}\}$ tal que nenhum dos arcos $P_{i_j}P_{i_k}$ tenha tamanho 3 ou 8.

4. (*Tcheca 2001*) Numa certa língua, há n letras. Uma sequência de letras é chamada uma *palavra* se, e somente se, entre qualquer par de letras idênticas, não haja outro par de letras idênticas. Prove que existe uma palavra de tamanho máximo, e encontre o total de palavras que têm esse tamanho.

5 Grafos

1. (*MOSP 2002*) Há n índios numa ilha. Quaisquer dois deles ou são amigos ou inimigos. Um dia, o cacique ordena que todos os índios (inclusive ele) usem um colar com zero ou mais pedrinhas de modo que: (i) dado um par de amigos, existe uma cor tal que cada amigo tem uma pedra daquela cor; (ii) dado um par de inimigos, não existe uma cor tal que cada um tenha um pedra daquela cor.

   (a) Prove que os índios podem realizar o pedido do cacique

   (b) Qual o menor número de cores necessárias para realizar o pedido?

2. (*Bulgária 2001*) Encontre o menor inteiro positivo n satisfazendo:

   (a) entre quaisquer 4 pessoas entre as n, existem duas que não são amigas

   (b) dado quaisquer $k \geq 1$ pessoas entre as quais não existem duas que são amigas, existe 3 entre as $n - k$ restantes tais que cada 2 são amigas.

3. (*Bulgária 2004*) Considere um grupo de n turistas. Entre cada 3, há 2 deles que não se conhecem. Para cada partição dos turistas em 2 ônibus, há 2 turistas que estão no mesmo ônibus e que se conhecem. Prove que um turista conhece no mximo $\frac{2}{5}n$ turistas.

4. (*Alemanha 2004*) Consideramos um grafo com vértices pintados de preto ou branco. "Trocar" um vértice quer dizer: pintá-lo de branco se era preto e vice-versa. Considere um grafo com todos seus vértices pintados de

branco. Podemos fazer a seguinte operação: trocar simultaneamente o vértice e todos seus vizinhos, Podemos chegar só através dessa operação num grafo com todos seus vértices pintados de preto?

5. (*Rússia 2002*) Um grafo tem 2002 pontos. Dados quaisquer três pontos distintos A, B, C há um caminho de A para B que não envolve C. Um movimento é tomar um ciclo qualquer (um conjunto de pontos distintos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ tal que P_1 é ligado a P_2, P_2 é ligado a $P3, \ldots, P_{n-1}$ é ligado a P_n, e P_n a P_1) e remover suas arestas e adicionar um novo ponto X e ligá-lo a cada ponto do ciclo. Depois de uma série de movimentos, o grafo não tem mais ciclos. Prove que pelo menos 2002 pontos só têm uma aresta.

6. (*Rússia 2001*) Um país tem 2001 cidades. Cada cidade tem uma estrada a ligando a pelo menos uma outra cidade. Se um subconjunto de cidades é tal que qualquer outra cidade tem uma estrada a ligando para pelo menos uma no subconjunto, então tem pelo menos $k > 1$ cidades. Prove que a cidade pode ser particionada em $2001 - k$ repúblicas tal que náo há duas cidades conectadas na mesma repúlica.

7. (*Argentina 2005*) Dizemos que um grupo de k meninos é n-aceitável se ao remover um garoto qualquer do grupo, podemos sempre encontrar entre os outro $k - 1$, um grupo de n meninos tais que todos se conhecem. Para cada n, encontre o maior k para o qual qualquer grupo de k meninos n-aceitável sempre possui um grupo de $n + 1$ meninos tais que todos se conhecem.

8. (*Ukrânia 2004*) Você pode colorir um grafo com 2004 vértices Can you colour the edges of a graph with 2004 vertices with 2003 colours each one used 1002 times such that for every 2 colours used there exists a cycle through the graph which passes through all the points and has it's edges exclusively of these 2 colours?

9. (*Rússia 2002*) Alguns pares de cidades de uma cidade são ligados por estradas de modo que há um caminho único de qualquer cidade a outra que não passa por qualquer cidade duas vezes. Exatamente 100 das cidades têm uma única estrada. Mostre que é possível consrtuir 50 novas cidades de modo que ainda haveria um caminho de qualquer cidade a outra se qualquer estrada (nova ou velha) fosse fechada para manutenção.

10. (*Rússia 2002*) Um grafo tem n pontos e 100 arestas. Um movimento é escolher um ponto e remover todas as suas arestas e ligá-lo a pontos que ele não estava ligado anteriormente. Qual o menor número de movimentos necessários para existirem dois pontos no grafo que não possuem um caminho entre eles?

6 Conjuntos

1. (*Hungria 97*) São dados 1997 inteiros positivos distintos, quaisquer 10 tendo o mesmo mmc. Encontre o maior número possível de nḿeros dois a dois primos entre si.

2. (*Irlanda 97*) Seja A um subconjunto de $\{0, 1, \ldots 1997\}$ contendo mais de 1000 elementos. Prove que A contém ou uma potência de 2 ou dois inteiros distintos cuja soma é uma potência de 2.

3. (*Seleção Brasil 2001*) Para um conjunto não vazio X de inteiros, seja $s(X)$ a soma dos elementos de X. Suponha que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{11}\}$ seja um conjunto de inteiros positivos, com $a_1 < a_2 < \cdots < a_{11}$ e tal que, para cada inteiro $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 1500\}$, haja um subconjunto B de A tal que $s(B) = n$. Determine o menor valor possível para a_{10}.

4. (*MOSP 2002*) Sejam $n_1 < n_2 < \cdots < n_{2000} < 10^{100}$ inteiros positivos. Prove que podemos encontrar dois subconjuntos não-vazios disjuntos A, B de $\{n_1, n_2, \ldots, n_{2000}\}$ tais que $|A| = |B|$, $\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in B} x$ e $\sum_{x \in A} x^2 = \sum_{x \in B} x^2$.

5. (*China 97*) Seja $n > 6$ um número natural. X é um conjunto tal que —X—=n. $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são subconjuntos distintos de X com 5 elementos cada. Se $m > \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(4n-15)}{600}$, prove que existem $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_6}(1 \leq i_1 < i_2 < \cdots, i_6 \leq m)$, tais que $\bigcup_{k=1}^{6} A_{i_k} = 6$.

6. (*China 99*) Seja $S = \{1, 2, \ldots, 15\}$. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de S satisfazendo as seguintes condições:

   (a) $|A_i| = 7, i = 1, 2, \ldots, n;$

   (b) $|A_i \cap A_j| \leq 3, 1 \leq i < j \leq n$

   (c) Para qualquer subconjunto M de 3 elementos de S existe A_k tal que $M \subset A_k$.

   Encontre o menor valor possível de n.

7. (*China 2002*) Seja $n > 1$, e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ conjuntos não-vazios de X={1, 2, ..., n}. Prove que existem conjuntos não vazios disjuntos I, J de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, tal que:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in J} A_i.$$

8. (*Índia 2003*) Seja n um inteiro positivo e $\{A, B, C\}$ uma partição de $\{1, 2, 3, ..., 3n\}$ tal que $|A| = |B| = |C| = n$. Prove que existe $x \in A, y \in B, z \in C$ um entre x, y, z é igual a soma dos outros dois.

9. (*China 95*) 21 pessoas fazem um test composto de 15 questões de verdade ou falso. Sabe-se que qualquer par de pessoas tem pelo menos uma questão certa em comum. Qual o menor número de pessoas que podem ter respondido corretamente a questão que mais gente acertou?

10. (*Belarússia 2001*) Um comitê de olimpíada elabora versões de uma compteição. Cada versão contêm 4 problemas de um banco de n e quaisquer duas versões tem no máximo um problema em comum.

    (a) Se $n = 14$, determine o maior número possível de versões

    (b) Encontre o menor n para o qual é possível elaborar 10 versões.

11. (*China 2001*) Determine o menor inteiro positivo m para o qual qualquer subconjunto W de m elementos de $X = \{1, 2, \ldots, 2001\}$, há dois elementos $u, v \in W$ (não necessariamente distintos) com $u + v = 2^n$ para algum inteiro positivo n.

7 Outros

1. *França 2005* Num encontro internacional de $n \geq 3$ participantes, são faladas 14 línguas. Sabemos que:

   (a) quaisquer 3 participantes falam uma língua em comum;

   (b) nenhuma língua é falada por mais da metade dos participantes.

   Qual o menor valor possível de n?

2. (*Banco 2003*) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reais. Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $a_{ij} = 1$ se $x_i + y_j \geq 0$, e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Seja B uma matriz $n \times n$ formada de 0's e 1's de modo que a soma de cada linha de A é igual a soma da linha correspondente de B, o mesmo vale para colunas. Prove que $A = B$.

3. (*China 98*) $n \geq 5$ times de futebol participam de um campeonato todos contra todos. Em cada jogo, o vencedor ganha 3 pontos, o perdedor 0 e, em caso de empare, cada time recebe 1 ponto. O terceiro pior time tem menos pontos que todos os outros times acima dele, no entanto ganhou mais jogos que todos eles. O terceiro pior time foi melhor que os dois piores, mas ganhou menos jogos do que cada um deles. Encontre o menor valor possível de n.