Combinatória I

Smauel Barbosa

30 de março de 2006

De quantas maneiras diferentes podemos escolher nossa roupa? Perguntas como essa aparecem frenquentemente na nossa vida. Nosso objetivo é tentar descobrir como responder essa pergunta em situações gerais.

Exemplo 1. *Existem 5 diferentes tipos de sorvetes e 3 diferentes tipos de vasilhas em uma sorveteria. De quantos modos podemos escolher um sorvete e uma vasilha?*

Solução 1. *Primeiro escolha uma vasilha. Para terminarmos nosso conjunto , basta escolhermos um sorvete. Então temos 5 diferentes conjuntos a partir da vasilha escolhida. Como existem 3 vasilhas, temos 15 conjuntos diferentes (* $15 = 3 \cdot 5$*).*

Exemplo 2. *Na sorveteira do problema anterior existem 4 tipos diferentes de coberturas. De quantas maneiras podemos escolher uma vasilha, um sorvete e uma cobertura?*

Solução 2. *Para cada um dos 15 conjuntos diferentes de sorvete e vasilha, podemos escolher 4 tipos deiferentes de coberturas. Então o número de todos os possíveis conjuntos é 60 (*$60 = 15 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4$*).*

Exemplo 3. *Existem 3 cidades A , B e C em Bruzundanga. Existem 6 estradas entre A e B, 4 estradas entre B e C. De quantos modos podemos ir de A até C?*

Exemplo 4. *Uma nova cidade D e novas estradas foram construídas em Bruzundanga. Três estradas entre A e D, duas entre D e C.*

Solução 3. *Considere dois casos: Ou uma rota passa por B ou por D. Em cada caso sabemos calcular o número de rotas. Se nós passamos por B então temos 24 maneiras de dirigir de A até C, caso contrário temos 6 maneiras. Para obter a resposta temos que somar esses dois números.*

Dividir um problema em **casos** pode ser muito útil.

Exemplo 5. *Se na sorveteria tivéssemos dinheiro apenas para comprar duas opções dentre sorvete, vasilha, cobertura. De quantos modos isso pode ser feito?*

Solução 4. *Três casos são possíveis: comprar um sorvete e uma vasilha, um sorvete e uma cobertura ,uma cobertura e uma vasilha. Sabemos calcular o número de maneiras em cada um desses três casos: 15, 20 e 12 respectivamente. Somando, obtemos a resposta: 47.*

Exemplo 6. *Nós chamamos um número natural de "bonito"se todos os seus dígitos são ímpares. Quantos números bonitos de quatro dígitos existem?*

Solução 5. *É claro que existem apenas 5 números bonitos de 1 dígito. Podemos colocar outro dígito ímpar, à direita, de cada um desses números de 5 maneiras diferentes. Então temos* $5 \cdot 5 = 25$ *numeros bonitos de dois dígitos. Similarmente temos* $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ *números bonitos de três dígitos, e* $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ *números bonitos de 4 dígitos.*

Exercício 1. *Quantas sequências de n sinais $+$ ou $-$ menos podem ser colocadas no produto* $(\pm 1)(\pm)\ldots(\pm 1)$ *de modo que o resultado seja positivo?*

Exercício 2. *E se no problema anterior quisermos que as sequências comecem com o sinal $+$ e o resultado seja positivo?*

Exercício 3. *Para cada subconjunto do conjunto* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *associe uma sequência de sinais $+$ ou $-$. Você colocará $+$ na i-ésima posição, se o elemento i estiver, e $-$ caso contrário. Mostre que o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos é 2^n*

Exercício 4. *Dispomos de uma balança de dois pratos para verificarmos os pesos de* 30 *objetos que tem pesos inteiros e que variam de 1 até 30. Temos k pesos que podemos colocar no prato esquerdo para compararmos* *os pesos dos objetos(que devem ficar no prato direito). Sabendo que é possível dizer exatamente todos os 30 pesos, determine o menor valor possível de k.*

Exercício 5. *Jogamos uma moeda três vezes. Quantas sequências diferentes de caras e coroas podemos obter?*

Exercício 6. *Cada quadrado de um tabuleiro 2×2 pode ser pintada de preto ou branco. Quantas colorações diferentes podemos ter?*

Exercício 7. *De quantas maneiras podemos preencher um cartão da loteira esportiva? Na loteira esportiva você tem que adivinhar o resultado de 13 jogos, indicando ou uma vitoria para um dos times ou um empate.*

Exercício 8. *No alfabeto de Bruzundanga, existem apenas três letras, A, B e C. Uma palavra é uma sequência de arbitrária de não mais que 4 letras. Quantas palavras existem no alfabeto de bruzundanga?*

Exemplo 7. *Um capitão e um vice-capitão tem que ser escolhidos de um time com 11 jogadores. De quantos modos podemos fazer isto?*

Solução 6. *Qualquer um dos 11 jogadores pode ser o capitão. Escolhido o capitão, qualquer um dos outros 10 pode ser escolhido como o vice-capitão. Então, nós temos $11 \cdot 10 = 110$ maneiras diferentes de escolher essa dupla.*

Veja que nesse problema a escolha do capitão influenciou na esolha de quem pode ser o vice-capitão. Nesse caso, as duas escolhas não são. **independentes**.

Exemplo 8. *De quantas maneiras podemos costurar uma bandeira de três cores com três tiras horizontais de igual tamanho se nós temos seis tiras de cores diferentes.*

Solução 7. *Existem 6 tipos possíveis de cores para a tira de cima. Após escolhida a cor desta tira, temos apenas 5 cores possíveis para a tira do meio, e apenas 4 cores para a tira de baixo. Então, nós temos $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneiras de costurar a bandeira.*

Exemplo 9. *De quantas maneiras podemos colocar uma torre branca e outra petra em um tabuleiro de xadrez de modo que elas não se ataquem?*

Solução 8. *A torre branca pode ser colocada em qualquer uma das 64 casas do tabuleiro. Não importa ondeonde fique, esta torre sempre atacará exatamente outras 15 casas do tabuleiro. Assim, temos apenas 49 possíveis casas para colocarmos a torre branca. Então a resposta é: $64 \cdot 49 = 3136$.*

Exemplo 10. *De quantas maneiras podemos colocar um rei branco e outro preto em um tabuleiro de xadrez de modo que eles não se ataquem?*

Vamos agora estudar o problema de quantas formas podemos arranjar n objetos em uma linha. Tal arranjo é chamado permutação. Antes de estudá-los vamos ver o conceito de *fatorial*. Se n é um número natural, então $n!$ (Lê-se n *fatorial*) é o produto: $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. Exemplo $2! = 2, 3! = 6$, $4! = 24$ ... Para conveniência nos cálculos, definimos $0! = 1$.

1. Calcule $\dfrac{10!}{7!}$.
2. Calcule $\dfrac{20!}{17!3!}$
3. Quais os dois últimos dígitos de 100! ?
4. 12! é múltiplo de 13?

Exemplo 11. *Quantos números de três digitos podem ser escritos usando os dígitos 1,2 e 3 (sem repetição) em alguma ordem?*

Solução 9. *O primeiro dígito da esquerda , pode ser escolhido de 3 maneiras, o segundo pode ser escolhindo dentre os três restantes e o último dígito tem que ser o dígito que ainda não foi escolhido. Assim, o número de três dígitos é $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$.*

Exercício 9. *De quantos modos podemos colocar 4 bolas de cores diferentes em uma linha?*

O número de permutações de n objetos é $n!$

Chamaremos de palavra qualquer sequência finita de dígitos. Por exemplo: ABC , CAB e ACB são palavras com as letras A, B, C.Nós próximos problemas, calcule o número de palavras que podem ser obtidas apenas reordenando as letras:

1. $CALÇA$
2. $MALA$
3. $CARAVANA$
4. $ARARA$
5. $MATEMATICA$

Na palavra $MALA$ aparecem duas letras iguais a A. Chamemos temporariamente essas duas letras de A_1 e A_2. Com isso, temos $5! = 120$ palavras diferentes. Entretanto quaisquer duas palavras que podem ser obtidas uma da outra por uma tranposição das letras A_1 e A_2, são identicas. Então, nossas 120 palavras podem ser divididas em grupos de dois , cada grupo com palavras idênticas. A resposta então é: $\frac{120}{2} = 60$. Em $CARAVANA$ pensemos nos três A´s como sendo A_1 , A_2 e A_3. Temos , desse modo, 8! palavras. Entretanto qualquer palvra que pode ser obtida de outra, apenas transpondo letras A_i, são identicas. Como as letras A_i podem ser rearranjadas em seus lugares de $3! = 6$ maneiras, todas as 8! palavras podem ser divididas em grupos de 3! palavras identicas. Então a resposta é $\frac{8!}{3!}$.

Em alguns desses exemplos **contamos** o número de objetos mais simples e depois dividímos pelas **repetições** que não nos interessavam.

Exercício 10. *Em um país existem 20 cidades e todo par de cidades é ligado por uma estrada. Quantas estradas existem?*

Exercício 11. *Quantas diagonais existem em um polígono de n lados convexo?*

Exercício 12. *Em Kracóvia existem apenas 9 casas muito distantes entre si. É possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas?*

Exemplo 12. *Um colar é um fio circular com pedrinhas que podem deslizar sobre o fio. É permitido rodar o colar , mas não virá-lo. Quantos diferentes colares podem ser feitos usando 13 diferentes pedrinhas?*

Solução 10. *Se fosse proíbido rodar o colar é claro que existiriam* $13!$ *colares diferentes. Entretanto, qualquer arranjo das pedrinhas tem que ser considerado identico a outros 12 que podem ser obtidos por rotação. Então a resposta é: 12!.*

Exercício 13. *Se no problema anterior fosse permitido virar o colar. Qual seria a resposta?*

Exemplo 13. *Quantos números de seis dígitos tem pelo menos um dígito par?*

Solução 11. *Ao invés de contarmos os números com pelo mneos um dígito par, contemos os que não tem essa propriedade. Existem exatamente* 5^6 *números de seis dígitos com todos os dígitos ímpares. Como existem 90000 números de deis dígitos, então o número procurado é:* $900000 - 5^6 = 884375$.

Usamos uma importante idéia de contar o **complementar** de um conjunto.

Exercício 14. *Existem apenas 6 letras no alfabeto de Cracolandia. Uma palavra é qualquer sequencia de seis letras em que duas delas são iguais. Quantas palavras tem o alfabeto de Cracolandia?*

Exercício 15. *Quantos números tem todos os seus dígitos de igual paridade(todos pares ou todos ímpares)?*

Exercício 16. *De quantas maneiras podemos colocar 8 torres em um tabuleiro de xadrez de modo que quaisquer duas não se ataquem?*

Exercício 17. *Quantas palavras podem ser escritas usando exatamente cinco letras A e não mais que três letras B(sem usar nenhuma outra letra diferente de A e B)?*

Exercício 18. *De quantas maneiras podemos dividir 14 pessoas em 7 pares?*

Exercício 19. *(AMC) Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada um de seus oito pés. De quantas maneiras diferentes a aranha pode se calçar admitindo que a meia tem que ser colocada antes do sapato?*

Exercício 20. *Vinte e cinco garotos e vinte e cinco garotas estão sentados ao redor de uma mesa. Prove que é sempre possível encontrar uma pessoa em que ambos os seus vizinhos são garotas.*

Exercício 21. *(AHSME) Nove cadeiras em uma sala irão ser ocupadas por 6 estudantes e 3 professores A, B e C. Os professores chegam antes dos alunos e escolhem suas cadeiras de modo que entre dois professores exista uma cadeira vazia. De quantas maneiras os três professores podem escolher seus lugares?*

Exercício 22. *(AHSME) Nós chamamos um número de telefone* $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ *de legal se o número* $d_1d_2d_3$ *é igual a* $d_4d_5d_6$ *ou a* $d_5d_6d_7$. *Assuma que cada* d_i *pode ser qualquer dígito de 0 a 10. Quantos telefones legias existem?*