Teorema de Bézout, congruências lineares e teorema chinês dos restos

Yuri Lima

9 de abril de 2006

Problema 1. *Ache uma solução* (x, y, z) *nos inteiros da equação*

$$x^7 + y^8 = z^9.$$

Problema 2. *(Banco IMO) Sejam* $a, b, c, \in \mathbb{N}$ *tais que* c *é primo com* ab. *Prove que existem naturais* x, y, z *tais que*

$$x^a + y^b = z^c.$$

Problema 3. *(Teste IMO 2001) Seja* $f(n)$ *o menor inteiro positivo* k *tal que* n *divide* $\sum_{i=1}^{k} i$. *Prove que* $f(n) = 2n - 1$ *se, e somente se, existe um inteiro não-negativo* m *tal que* $n = 2^m$.

Problema 4. *(Putnam 2000) Sejam* m *e* n *inteiros positivos, com* $m \geq n$. *Prove que* $\dfrac{mdc(m,n)}{m}\dbinom{m}{n}$ *é inteiro.*

Problema 5. *(IMO 1989) Mostre que, para cada natural* n, *existem* n *inteiros positivos consecutivos tais que nenhum deles é um primo ou potência de primo.*

Problema 6. *(Banco IMO) Mostre que existem* n *naturais consecutivos tais que nenhum deles possa ser escrito como a soma de dois quadrados .*

Problema 7.

(a) Sejam a *e* k *inteiros,* a *ímpar. Mostre que a congruência* $x^2 \equiv a \pmod{2^k}$ *tem solução para todo* $k \geq 3$ *se , e somente se, a congruência* $x^2 \equiv a \pmod 8$ *possuir solução.*

(b) Seja p *um primo ímpar e* a *um inteiro primo com* p. *Mostre que a congruência* $x^2 \equiv \pmod{p^k}$ *tem solução para todo inteiro* $k \geq 1$ *se , e somente se, a congruência* $x^2 \equiv a \pmod p$ *possuir solução.*

Problema 8. *(Banco IMO 1999) Mostre que existem duas sequências estritamente crescentes* (a_n) *e* (b_n) *tais que* $a_n(a_n + 1)$ *divide* $b_n^2 + 1$ *para todo natural* n.

Problema 9. *(Cone Sul 2003) Demonstrar que existe uma sequência de inteiros positivos* $x_1, x_2, \ldots$ *que satisfaz as duas condições seguintes:*

(a) contém exatamente uma vez cada um dos inteiros positivos,

(b) a soma parcial $x_1 + x_2 + \ldots x_n$ *é divisível por* n^n.