# PROBLEMAS SOBRE PONTOS I

Davi Maximo (UFC) e Samuel Feitosa (UFC)

Distribuir pontos num plano ou num espaço é uma tarefa que pode ser realizada de forma muito arbitrária. Por isso, problemas sobre pontos podem ser de diversas naturezas. Nesse artigo, trataremos as principais técnicas para resolver esses tipos de problemas,

## 1. Fecho Convexo

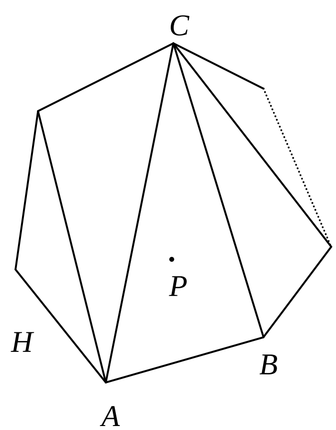
Pense no seguinte: dados $n$ pontos num plano, podemos escolher alguns deles formando um único polígono convexo que contém, junto com seu bordo e seu interior, todos os $n$ pontos. Tal afirmação pode ser provada por indução (que alias, é uma ferramenta que sempre deve ser lembrada em problemas de matemática discreta em geral). Tal polígono é chamado o *fecho convexo* desses $n$ pontos. Vamos ver que tão pouco já nos ajuda bastante em alguns problemas sobre pontos.

**PROBLEMA 1**

Seja $S$ um conjunto finito de pontos, não havendo três colineares, tal que dados quaisquer 4 pontos de $S$ eles formam um quadrilátero convexo. Mostre que $S$ é um conjunto de vértices de um polígono convexo.

**SOLUÇÃO**

Seja $H$ o fecho convexo de $S$.




Suponha um ponto $P$ de $S$ no interior de $H$. Escolha uma triangulação de $H$ (assim como o fecho convexo, é simples provar que todo polígono convexo admite pode ser dividido por triângulos tendo como lados diagonais ou lados do polígono, tente indução).
Assim, $P$ fica no interior de algum triângulo $ABC$. Logo, o quadrilátero $ABCP$ não é convexo, absurdo!
Portanto, $S$ não pode ter pontos no interior do seu fecho convexo, donde $S$ é convexo, já que $S$ não contém três pontos colineares.

Os próximos problemas são resolvidos similarmente.

**PROBLEMA 2**

Mostre que dados 5 pontos , não três colineares, existe um quadrilátero convexo com vértices nesses pontos.

**PROBLEMA 3**

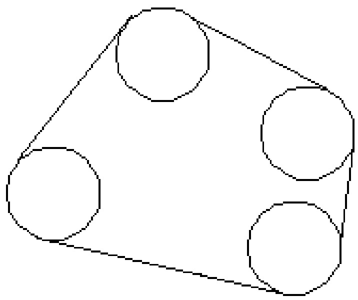
Mostre que dado qualquer conjunto de pontos no plano existe uma reta por dois destes pontos que divide o plano em dois semi-planos de modo que um desses semi-planos não contém nenhum ponto do conjunto.

**PROBLEMA 4**

(Lista Cone Sul 2001) É possível que a reunião de um número finito de quadriláteros não convexos seja um polígono convexo?

**PROBLEMA 5**

Dado um conjunto de N discos de raios unitários. Esses círculos podem se intersectar (mas não coincidir). Mostre que existe um arco de comprimento maior ou igual a $\frac{2\pi}{N}$ pertencendo à circunferência de um desses discos que não é coberto por nenhum outro disco.



(**IDÉIA DA SOLUÇÃO**) Consideremos o fecho convexo H desse conjunto de discos. Um arco que esteja na borda do fecho convexo não pode ser coberto por outro disco. Mostre que a "junção" de todos os arco no bordo de H é um círculo de raio unitário. Como este círculo tem perímetro $2\pi$ e no máximo juntamos N arcos, pelo menos um dos arcos da junção é maior ou igual a $\frac{2\pi}{N}$.

**PROBLEMA 6**

(OBM 96) Existe um conjunto *A* de *n* pontos ( $n \geq 3$ ) em um plano tal que:
*i*) *A* não contém três pontos colineares;
*ii*) dados quaisquer três pontos pertencentes a *A*, o centro da circunferência que contém estes pontos também pertence a *A*?

Os próximos dois problemas são de IMO e podem ser resolvidos usando só fecho convexo (na realidade, muita raça também, que é algo imprescindível em qualquer problema, principalmente de IMO).

**PROBLEMA 7**

(IMO 99/1) Determine todos os conjuntos finitos *S* de pontos do plano com pelo menos três elementos que satisfazem a seguinte condição:
Para quaisquer dois pontos distintos *A* e *B* de *S*, a mediatriz do segmento *AB* é um eixo de simetria de *S*.
(Veja a solução desse problema por Fabrício Siqueira Benevides na Revista Eureka! N°6. )

**PROBLEMA 8**

(IMO 95/3) Determine todos os inteiros $n > 3$ para os quais existem *n* pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ no plano, e números reais $r_1, r_2, \ldots r_n$ satisfazendo as condições:

(a) não há três pontos $A_i, A_j, A_k$ colineares;

(b) para cada tripla *i* ,*j*, *k* ($1 \leq i < j < k \leq n$) o triângulo $A_i A_j A_k$ tem área $r_i + r_j + r_k$ .

**SOLUÇÃO**

Vamos fazer o caso $n \geq 5$. Considere, dentre os *n* pontos, cinco pontos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ e seu fecho convexo . Temos três casos:
*1° Caso:* O Fecho Convexo é um triângulo.
Podemos assumir que tal fecho é o triângulo $A_1A_2A_3$, $A_4$ e $A_5$ estão no interior de $A_1A_2A_3$, com $A_5$ fora de $A_1A_2A_4$ e $A_4$ fora de $A_1A_2A_4$ (faça uma figura). Seguindo nossa notação para áreas, temos:

$$[A_1A_4A_5] + [A_1A_2A_3] = (r_1 + r_4 + r_5) + (r_1 + r_2 + r_3) =$$
$$= (r_1 + r_2 + r_4) + (r_1 + r_3 + r_5) = [A_1A_2A_4] + [A_1A_3A_5] < [A_1A_2A_3].$$

absurdo!

*2° Caso:* O Fecho Convexo é um quadrilátero

Suponha $A_5$ no interior do fecho convexo $A_1A_2A_3A_4$. Note que

$$[A_1A_2A_3A_4] = [A_1A_2A_3] + [A_1A_3A_4] = [A_1A_2A_4] + [A_2A_3A_4]$$

e portanto, $(r_1 + r_2 + r_3) + (r_3 + r_4 + r_1) = (r_1 + r_2 + r_4) + (r_2 + r_4 + r_3) \Rightarrow r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

Logo, $2[A_1A_2A_3A_4] = 3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$. Também,

$$[A_1A_2A_3A_4] = [A_1A_2A_5] + [A_2A_3A_5] + [A_3A_4A_5] + [A_4A_1A_5]$$

Logo, temos $r_5 = -(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)/8 = -[A_1A_2A_3A_4]/12 < 0$. Agora, observe que como $A_1, A_3, A_5$ não são colineares, podemos supor um dos lados de $\angle A_1A_3A_5 < 180°$. Então, um dos quadriláteros $A_1A_5A_3A_4$, $A_1A_5A_3A_2$ é convexo. Digamos, $A_1A_5A_3A_4$ convexo. Então, temos $r_1 + r_3 = r_4 + r_5$ e portanto, ficamos com $r_2 = r_5$. Analogamente, usando que $A_2, A_4, A_5$ não são colineares, temos $r_5 = r_1$ ou $r_3$. Assim, três dos números $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ são negativos, obtendo uma área negativa. Absurdo!

*3° Caso*: O Fecho convexo é um pentágono

Suponha que $r_1$ seja o menor deles. Traçando uma paralela *l* por $A_1$ à reta $A_3A_4$. Como $[A_1A_3A_4] = r_1 + r_3 + r_4 \le r_2 + r_3 + r_4 = [A_2A_3A_4]$, $A_2$ pertence a *l* ou ao semiplano definido por $l$ oposto ao $A_3A_4$ e, analogamente $A_5$. Como $A_1, A_2, A_5$ não podem estar todos em $l$, temos $\angle A_2A_1A_5 > 180°$, absurdo! .

Logo, $n \le 4$. Um exemplo para $n = 4$ é um quadrado $A_1A_2A_3A_4$ de lado 1 com $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/6$.

Finalizamos essa parte com dois problemas bonitinhos.

**PROBLEMA 9**

(USAMO 2005) Seja *n* um inteiro positivo maior que 1. Suponha que são dados 2*n* pontos no plano, não havendo três colineares. Suponha que *n* dos 2*n* são pintados de azul e os outros *n* de vermelho. Uma reta no plano é dita *balanceada* se passa por um ponto azul e um ponto vermelho, e o número de pontos azuis em cada um de seus lados é igual ao número de pontos vermelhos. Prove que existem pelo menos duas retas balanceadas.

**DICA***: Prove que cada ponto do fecho convexo dos pontos está em pelo menos uma reta balanceada.*

**PROBLEMA 10**

(Kömal 2002) Dado um conjunto qualquer de pontos no plano, não contendo três colineares, prove que é possível colorir os pontos com duas cores (azul e vermelho) tal que todo semiplano contendo pelo menos três pontos do conjunto contenha um ponto de cada cor.

## 2. Princípio das Casas dos Pombos

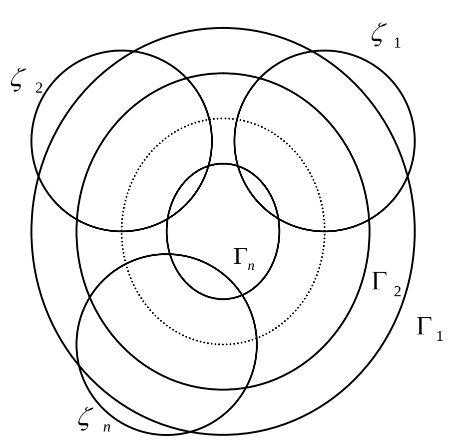
O princípio da casas dos Pombos, PCP, é importante e deve ser lembrado sempre. Nossos dois primeiros problemas dessa sessão são apenas versões dificultadas daquele exercício clássico do PCP. : dados cincos pontos num quadrado unitário, existem dois cuja distância entre eles é menor que $\sqrt{2}/2$ .

**PROBLEMA 11**
(Japão 97) Prove que entre quaisquer dez pontos no interior de um círculo de diâmetro 5, existem dois cuja distância entre eles é menor que 2.

**PROBLEMA 12**
(Coréia 97) Prove que entre quaisquer quatro pontos no interior de um círculo unitário, existem dois deles cuja distância é menor que $\sqrt{2}$.

**PROBLEMA 13**
(Rioplatense 2002) Daniel escolhe um inteiro positivo *n* e diz a Ana. Com esta informação, Ana escolhe um inteiro *k* e diz a Daniel. Daniel traça então *n* circunferências em um papel e escolhe *k* pontos distintos com a condição de que cada um deles pertença a alguma das circunferências que traçou. Em seguida, apaga as circunferências que traçou, sobrando visíveis apenas os *k* pontos que marcou. A partir desses pontos, Ana deve reconstruir pelo menos uma das circunferências que traçou Daniel. Determinar qual o menor valor de *k* que permite Ana alcançar seu objetivo independente como Daniel escolha as *n* circunferências e os *k* pontos.

**SOLUÇÃO**
O valor mínino é $k = 2n^2 + 1$.
1° Passo: $k = 2n^2 + 1$ é suficiente.
Se são dados $2n^2 + 1$ pontos marcados por Daniel, como estes pontos são distribuídos em *n* circunferências, pelo Princípio das Casas dos Pombos, pelo menos 2*n*+1 deles estão em uma mesma circunferência traçada por Daniel. Então, se Ana traça todas as circunferências determinadas por estes $2n^2 + 1$, haverá uma delas, digamos $\Gamma$, com pelo menos 2*n*+1 dos pontos. Como estes 2*n*+1 pontos provém das *n* circunferências de Daniel, três deles estão numa mesma circunferência traçada por ele, digamos $\zeta$. Logo, $\zeta$ e $\Gamma$ têm pelo menos três pontos em comum, e portanto, são a mesma circunferência (abusando da notação: $\zeta = \Gamma$). Assim, Ana consegue determinar umas das circunferências traçadas por Daniel.
2° Passo: Se $k < 2n^2 + 1$, Daniel pode traçar circunferências e escolher *k* pontos de modo a tornar impossível para Ana determinar tais circunferências.
Basta considerar $k = 2n^2$:




Traçamos *n* circunferências concêntricas $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ e outras *n* circunferências $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ duas a duas disjuntas, de modo que $\zeta_i$ corta $\Gamma_j$ em dois pontos distintos, para *i*, *j*= 1,2,...,*n*. Há exatamente $2n^2$ pontos de intersecção. Se Daniel marca estes pontos e apagas suas circunferências, Ana não conseguirá reconstruir com certeza nenhuma das circunferências, pois Daniel pode ter traçado inicialmente tanto $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ quanto $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$.

**PROBLEMA 14**

(Rioplatense 1999) Dois jogadores *A* e *B* disputam o seguinte jogo: *A* escolhe um ponto de coordenadas inteiras do plano e o pinta de verde; em seguida *B* escolhe 10 pontos de coordenadas inteiras, ainda não coloridos e os pinta de amarelo. O jogo continua assim com as mesmas regras: *A* e *B* escolhem um e dez pontos ainda não coloridos e os pintam de verde e amarelo, respectivamente.

(a) O objetivo de *A* é obter $111^2$ pontos verdes que sejam as interseções de 111 retas horizontais e 111 retas verticais (i.e., paralelas aos eixos de coordenadas). O objetivo de *B* é impedir-lhe. Determine qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora que lhe assegura seu objetivo.

(b) O objetivo de *A* é obter quatro pontos verdes que sejam vértices de um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados. O objetivo de *B* é impedir-lhe. Determine qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora que lhe assegura seu objetivo.

## 3. Idéias Extremais

Na matemática em geral, problemas de existência são muito comuns e importantes. São aqueles problemas que nos pedem para provar que a existência de alguma coisa. Na seção anterior, não explicitamente, nos deparamos com problemas desse tipo. É não foi para vender o artigo que iniciamos ambas as seções dizendo falando da importância dessas idéias, mas pelo o fato de que o PCP e o Princípio Extremal juntos são as ferramentas mais indispensáveis para o ataque desses problemas.

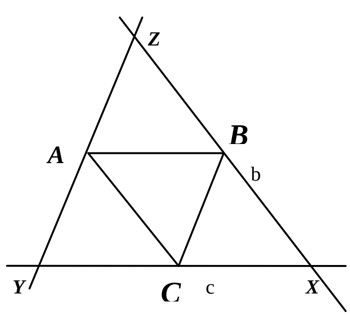
Mas afinal, que Princípio Extremal é esse? Digamos que temos um problema onde nos é pedido para provar a existência de um elemento satisfazendo uma certa propriedade *P*. Então, nós escolhemos um elemento que satisfaz maximalmente ou minimalmente, ou seja, extremalmente (será que acabamos de inventar essas palavras?) uma outra propriedade *Q*, não acidentalmente ligada com a desejada propriedade *P*. O que será que isso nos dá? Vejamos alguns problemas.

**PROBLEMA 15**

(Austrália 91) São dados $n \geq 3$ pontos no plano tais que a área de um triângulo formado por quaisquer três deles é no máximo 1. Prove que os $n$ pontos estão em um triângulo de área no máximo 4.

**SOLUÇÃO**

Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ os *n* pontos. Dentre os triângulos considerados, seja $ABC$ o de maior área (o cara com a propriedade *Q*). Considere por *A* uma reta *a* paralela a *BC*. Sendo assim, qualquer outro ponto $P_i$ deve estar no mesmo semiplano de *B* e *C* definido por *A*, pois do contrário teríamos um absurdo $[PBC] > [ABC]$ (aqui [*X*], denota a área de *X*) . Analogamente, considerando as retas *b* e *c* por *B* e *C* paralelas a *AC* e *AB*, respectivamente, concluímos que todos os pontos *P* devem estar no triângulo *XYZ* (acompanhe a figura ao lado). Como, $[XYZ] = 4[ABC] < 4 \cdot 1 = 4$, o resultado segue. (isto é, *XYZ* satisfaz a propriedade *P*).

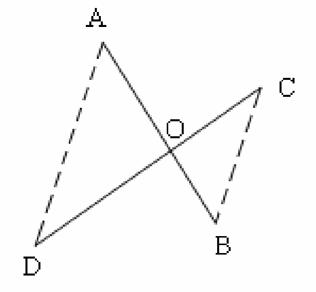



**PROBLEMA 16**

(Putnam 1979) Sejam $2n$ pontos no plano escolhidos de modo que quaisquer 3 não são colineares, n deles são pintados de vermelho e n deles são pintados de azul. Prove que é possível parear os pontos usando segmentos ligando cada ponto vermelho a exatamente um ponto azul de modo que esses segmentos não se cortem.

**SOLUÇÃO**

Existem $n^2$ maneiras de parear esses pontos. É claro que alguns desses pareamentos não cumprem a condição do enunciado. Olhemos em cada pareamento a soma dos seus segmentos. Escolha o pareamento que tem soma mínima. Suponha que nele existem dois segmentos $AB$ e $CD$ que se cortam (com $A$ e $C$ vermelhos)




Pela desigualdade triangular temos:

$$\left.\begin{array}{l} AO + OD > CD \\ OB + OC > CB \end{array}\right\} \Rightarrow AB + CD > AD + CB$$

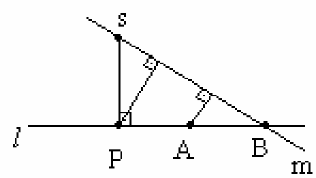
Logo se trocarmos $AB$ e $CD$ por $AD$ e $CB$ diminuiremos nossa soma. Assim neste pareamento não temos dois segmentos que se cortam.

**PROBLEMA 17**

(Teorema de Sylvester) Um conjunto S de pontos no plano tem a seguinte propriedade: qualquer reta passando por 2 pontos passa também por um terceiro. Mostre que todos os pontos estão sobre uma reta.

**SOLUÇÃO**

Considere o conjunto L das retas que passam por dois pontos de S. Cada ponto de S tem uma distância associada a cada reta de L. Como L e S são conjuntos finitos então temos um número finito distâncias. Considere o par $(l, s)$ do ponto $s \in S$ e $l \in L$ com a menor distância não nula associada. Como $l$ passa por dois pontos de S então deverá passar por um terceiro. Pelo menos dois pontos de S , digamos A e B, deverão estar em um "mesmo lado" de $l$ determinado por $P$ (pé da perpendicular de $s$ até $l$).




Suponhamos que A esteja entre B e P. Seja m a reta que passa por B e $s$ então:

$distância(A, m) \leq distância(P, m) < distância(s, l)$

Absurdo!

Assim todas as distâncias associadas têm que ser zero! Todos os pontos são colineares!

A seguir, veja como usar Sylvester.

**PROBLEMA 18**

São dados $(N \geq 3)$ pontos no plano, nem todos colineares. Mostre que são necessários pelo menos n retas para unir todos os possíveis pares de pontos.

**SOLUÇÃO**

Vamos tentar usar indução. Se $N = 3$ os três pontos formarão um triângulo. As retas suportes dos três lados desse triângulo satisfazem nossa afirmação. Suponha que a afirmação seja válida para $N = k$. Considere um conjunto T de $N = k + 1$ pontos. Como nem todos esses pontos estão sobre uma mesma reta decorre do teorema de Sylvester que existe uma reta que passa por apenas dois pontos (A e B) do conjunto. Pelo menos um dos conjuntos $T \setminus \{A\}$ ou $T \setminus \{B\}$ não poderá ter todos os seus $k$ pontos colineares. Então pela hipótese teremos pelo menos $k$ retas, mas a reta $AB$ não foi contada, assim a afirmação também é verdadeira para $N = k + 1$.

**PROBLEMA 19**

(Ibero 93) Prove que para qualquer polígono convexo de área 1, existe um paralelogramo de área dois que o contém.

**PROBLEMA 20**

(OBM 94) Considere todos os círculos cujas circunferências passam por três vértices consecutivos de um polígono convexo. Prove que um destes círculos contém todo o polígono.

**PROBLEMA 21**

(Rioplatense 97) Agustina e Santiago jogam o seguinte jogo sobre uma loja retangular:
Agustina diz um número $n$. Santiago, então marca $n$ pontos sobre a loja. Em seguida, Agustina escolhe alguns dos pontos marcados por Santiago. Santiago ganha o jogo se consegue desenhar um retângulo com lados paralelos aos da loja, que contenha todos os escolhidos por Agustina e nenhum dos restantes. Do contrário, Agustina ganha.
Qual o menor número que deve escolher Agustina para assegurar-se da vitória, independente como jogue Santiago?

**PROBLEMA 22**

(Rússia 2000) São dados $2n+1$ segmentos em uma linha reta. Cada segmento intersecta pelo menos $n$ outros. Prove que um desses segmentos intersecta todos os outros.

**PROBLEMA 23**

(Japão 2002) É dado um conjunto $S$ de 2002 pontos no plano $xy$, não havendo dois deles com a mesma abscissa $x$ ou ordenada $y$. Para quaisquer dois desses pontos $P$ e $Q$, considere o retângulo cuja diagonal é $PQ$ e cujos os lados são paralelos aos eixos. Denotemos por $W_{PQ}$ o número de pontos de $S$ no interior desse retângulo, sem contar com $P$ e $Q$. Determine o maior valor $N$ possível que satisfaz: não importa como os pontos de $S$ estão arranjados, existe pelo menos um par $P$ e $Q$ deles com $W_{PQ} \geq N$.

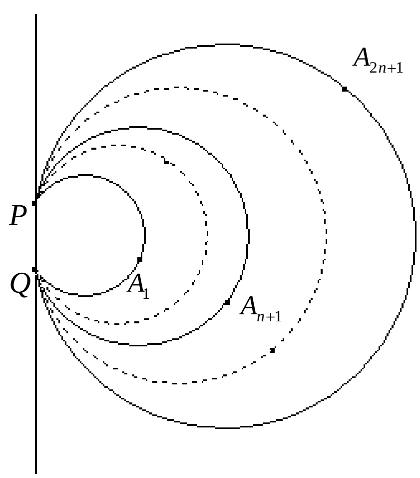
**PROBLEMA 24**

Dados $2n+2$ pontos no plano, não havendo três colineares, prove que existem dois deles que determinam uma reta que dos $2n$ pontos restantes, separa $n$ deles dos outros $n$.

**PROBLEMA 25**

(Banco IMO 93) Dados $2n+3$ pontos num plano, não havendo três colineares nem quatro concíclicos, prove que podemos escolher três deles de modo o círculo passando por estes tem $n$ dos pontos restantes no seu interior e $n$ no exterior.

**SOLUÇÃO**




Através do fecho convexo dos pontos, escolha dois deles, digamos $P$ e $Q$, tais que todos os outros pontos estão no mesmo semi-plano definido pela reta $PQ$.
Os outros $2n+1$ pontos podemos ordenar $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ de modo que:

$$\angle PA_1Q < \angle PA_2Q < \cdots < \angle PA_{2n+1}Q \ (*),$$

onde as desigualdades são todas restritas, já que não há 4 pontos concíclicos.
Considerando os círculos por $P, A_i, Q$, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$, vemos que o círculo por $P, A_{n+1}, Q$ satisfaz o pedido.

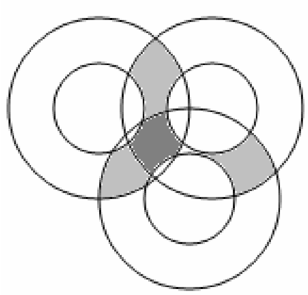
**PROBLEMA 26**
São dados $n$ pontos num plano. Em cada ponto médio de um segmento ligando dois desses pontos, colocamos um marcador. Prove que pelo menos $2n-3$ marcadores são utilizados.

## 4. Problemas de Coberturas

Nos problemas sobre pontos até agora, ficou claro que um pouco de geometria (sintética, analítica, trigonométrica ou utilizando o plano complexo) pode ser útil. Finalizaremos esse artigo com uma seção falando um pouco disso, em particular, fazendo coberturas com círculos.

**PROBLEMA 27**
Seja C um círculo de raio 16 e A um anel tendo raio interno 2 e raio externo 3. Agora suponha que um conjunto S de 650 pontos é selecionado dentro de C. Prove que, não importa como os pontos de S são selecionados dentro de C, o anel A pode ser colocado de modo a cobrir pelo menos 10 pontos de S.

**SOLUÇÃO**
Queremos mostrar que existe um ponto X no plano que possui uma distância maior que 2 e menor que 3 à pelo menos 10 pontos de S. Sobre cada ponto de S coloque um anel A. Basta mostrarmos que existe um ponto X que está no interior de pelo menos 10 desses anéis. As interseções desses anéis produzem pequenas regiões (veja a figura).



Veja que existem três pequenas regiões que estão em dois anéis e uma que está em três. Somando as áreas dos três anéis contaremos três regiões duas vezes e uma três vezes. Somando a área de cada anel temos $650.(9\pi-4\pi)=3250\pi$ .Aumentando o raio do círculo C para 19 poderemos cobrir todos esses anéis. Se cada pequena região foi contada no máximo 9 vezes contaremos no máximo 9 vezes a área desse novo círculo , ou seja, $9.19^2\pi=3249\pi<3250\pi$ .
Assim existirá uma pequena região contida em pelo menos 10 anéis. Basta escolhermos um ponto X dessa região.

**PROBLEMA 28**
(Ibero 98) Encontre o maior inteiro $n$ para o qual existem pontos $P_1,P_2,...,P_n$ no plano e números reais $r_1,r_2,...,r_n$ tais que a distância entre $P_i$ e $P_j$ é $r_i+r_j$ .

**PROBLEMA 29**
(Teste de Seleção da Romênia para a IMO-1978) M é um conjunto de $3n$ pontos no plano tal que a maior distância entre quaisquer dois desses pontos é 1 unidade. Prove que:

a. Para quaisquer 4 pontos de M, a distância entre algum par de pontos é pelo menos $\frac{1}{\sqrt{2}}$

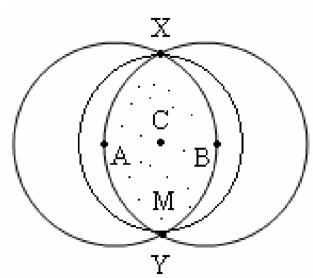
b. Algum círculo de raio $\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ cobre todo o conjunto M.

c. Existe algum par entre os $3n$ pontos de M cuja distância entre eles é no máximo $\frac{4}{(3\sqrt{n}-\sqrt{3})}$

**SOLUÇÃO**

**a.** Vamos tentar arranjar um triângulo não acutângulo em M. Considere o fecho convexo de quatro pontos de M. Podemos ter um quadrilátero (degenerado quando três pontos forem colineares) ou um triângulo com um ponto de M em seu interior. No caso do quadrilátero como pelo menos um dos quatro ângulos internos é $\geq 90^\circ$ basta escolhermos o vértice com este ângulo e os adjacentes a ele. No caso do triângulo vamos olhar para o ponto no interior. Esse ponto olha para os três lados do triângulo com ângulos que somados resultam em $360^\circ$. Pelo menos um deles é $\geq 120^\circ$. Seja $XYZ$ um triângulo com $\angle XYZ \geq 90^\circ$. Pela lei dos cossenos temos: $y^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos XYZ \geq x^2 + z^2$. Como $y \leq 1 \Rightarrow x$ ou z $\leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

**b.** Seja $r = AB$ a maior distância entre dois pontos de M. Tracemos círculos de raio $r$ centrados em A e B. M deverá estar contido em cada um desse círculos. Então M deverá estar contido na região de interseção entre eles. Tracemos um círculo de raio $\frac{\sqrt{3}c}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ centrado no ponto médio C de AB. Veja que este novo círculo cobre a região de interseção.




**c.** Vamos usar a mesma idéia do problema dos anéis. Se dois ponto de M estão em um círculo de raio $r$ então a distância entre eles não pode ser maior ou igual a $2r$. Então nosso objetivo é mostrar que existem dois pontos de M dentro de um círculo de raio $\frac{2}{(3\sqrt{n} - \sqrt{3})}$

Seja C um círculo de raio $\frac{\sqrt{3}}{2}$ que cobre M. Centrado em cada ponto de M tracemos um círculo de raio $r$. Suponha que Z é um ponto na interseção de dois desses círculos. Então o círculo de centro Z e raio $r$ cobre dois pontos de M(os centros dos círculos que cobriam Z). Como mostrar pelo menos dois desses círculos que traçamos irão se intersectar para $r = \frac{2}{(3\sqrt{n} - \sqrt{3})}$? Vamos aumentar o raio de C e obter um círculo D de raio $\frac{\sqrt{3}}{2} + r$ com mesmo centro. Todos esses círculos estarão contidos em D. Se a área de D for menor que a soma das áreas de cada círculo com certeza pelo menos dois deles terão interseção. Mas isso acontece se $3n\pi > \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + r\right)^2 \Leftrightarrow r^2(3n-1) - \sqrt{3}r - \frac{3}{4} > 0$ . Agora basta fazermos o estudo do sinal. Como a maior raiz é $\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{n}}{2(3n-1)}$ e $3n - 1 > 0$ se $r > \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{n}}{2(3n-1)}$ OK! $\Leftrightarrow \mathrm{r} > \frac{3}{2(3\sqrt{\mathrm{n}} - \sqrt{3})}$.

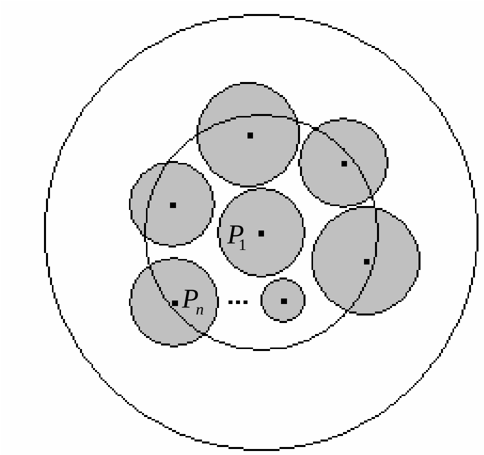
(Veja que podemos melhorar um pouco a cota do problema, pois $2 > \frac{3}{2}$).

**PROBLEMA 30**

(Ibero 97) Seja $P = \{P_1, P_2, ..., P_{1997}\}$ um conjunto de 1997 pontos no interior de um círculo de raio 1, com $P_1$ sendo o centro do círculo. Para $k = 1,2,...,1997$, seja $x_k$ a distância de $P_k$ ao ponto de $P$ mais próximo de $P_k$. Mostre que:

$$x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + ... + x_{1997}^{\ 2} \le 9 .$$

**SOLUÇÃO**




Note que $x_k \le 1$, para todo $k$.

Para cada ponto $P_k$, considere uma circunferência $\Gamma_k$ de centro $P_k$ e raio $\frac{x_k}{2}$.

Sendo assim, todos essas circunferências se tocam em no máximo 1 ponto e estão no interior de uma circunferência de centro $P_1$ e raio 3. Logo,

$$[\Gamma_1] + [\Gamma_2] + \cdots + [\Gamma_k] \le \pi \left( 3/2 \right)^2$$

donde:

$$\pi \left( x_1/2 \right)^2 + \pi \left( x_2/2 \right)^2 + \cdots + \pi \left( x_n/2 \right)^2 \le \pi \left( 3/2 \right)^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le 9 .$$

**PROBLEMA 31**

(IMO 89) São dados *n* e *k* inteiros positivos e um conjunto *S* de *n* pontos no plano tais que

(i) não há três pontos em *S* colineares,

(ii) Para qualquer ponto *P* de *S* existem pelo menos *k* pontos de *S* equidistantes de *P*.

Prove que

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n} .$$