HOMOTETIA

Marcelo Oliveira

Homotetia significa ampliação, positiva ou negativa, de qualquer ente geométrico, podendo ser figuras planas como triângulos, quadriláteros, círculos, ou espaciais como cubos, pirâmides, esferas. Apesar de não serem os únicos casos, é nestes que nós basearemos nosso estudo por serem os mais úteis na prática.

Para definirmos homotetia, necessitaremos de um centro de homotetia O e da razão de homotetia k, que pode ser qualquer número real. Na verdade, esses dois elementos é que serão responsáveis pela facilidade na resolução em relação a outros métodos, como a semelhança, por exemplo.

Um novo ponto X' é gerado através do ponto X inicial pela homotetia através da equação

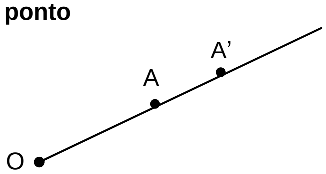
$$\boxed{\overrightarrow{ox'} = k \cdot \overrightarrow{ox}}$$

Esse tratamento vetorial na definição de homotetia serve para garantir dois fatos importantes:

1. DOIS PONTOS HOMOTÉTICOS ESTÃO ALINHADOS COM O CENTRO DE HOMOTETIA;
2. se k>0, então X e X' estão em uma mesma semi-reta das determinados por O na reta OX;
se k=0, X'≡O;
se k<0, então X e X' estão em semi-retas diferentes das determinadas por O sobre a reta OX.

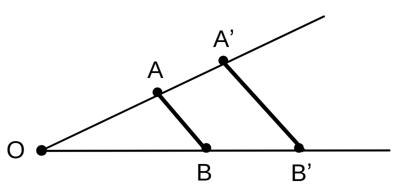
Vejamos alguns casos básicos.

1. Homotetia de ponto



O ponto A' é homotético de A pela homotetia de centro O e razão k. Portanto OA' = k×OA.

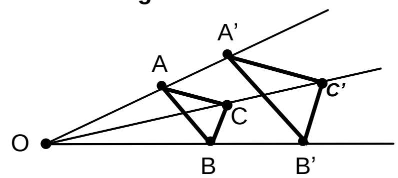
2. Homotetia de segmento



Inicialmente, perceba que o ponto B' foi gerado através de OB' = k×OB. Dessa forma, obtemos $\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = k$, ou seja, A'B'//AB, pela recíproca do teorema de Tales. Portanto:

A HOMOTETIA LEVA SEGMENTOS EM SEGMENTOS PARALELOS.

3. Homotetia de triângulos



Inicialmente, perceba que o ponto C' foi gerado através de OC' = k×OC. Pelo item anterior, temo A'C'//AC e B'C'//BC. Daí, ΔA'B'C' e ΔABC são semelhantes. Portanto:

`A homotetia leva triângulos em triângulos semelhantes e com lados paralelos`

Exemplos

01. Prove que as medianas de um triângulo ABC são concorrentes.

02. Seja t a reta tangente no ponto T ao círculo inscrito ao triângulo ABC e paralela ao lado BC (t≠BC). Seja J_A o ponto de tangência do ex-círculo do triângulo ABC relativo ao lado BC com o lado BC. Prove que A, T e J_A são colineares.

03. Prove que o circuncentro O, o baricentro M e o ortocentro H de um ΔABC são colineares. Em seguida, prove que HM = 2×MO. Depois encontre o centro do Círculo de Euler.

Problemas

01) Quatro círculos familiares no plano de um triângulo escaleno são o incírculo, o circuncírculo, o círculo de Euler e o círculo de Spieker. Sejam I, O, E, S seus respectivos centros. Prove que as retas IO e ES são paralelas.

02) Dois círculos são tangentes internamente no ponto A. Uma secante intersecta os círculos em M, N, P e Q (nessa ordem). Prove que MÂP=NÂQ.

03) Uma corda MN é desenhada no círculo Γ. Em um dos segmentos circulares, os círculos Γ_1 e Γ_2 são inscritos tocando o arco em A e C e a corda em B e D. Mostre que o ponto de interseção de AB e CD independe de AB e CD e da escolha de Γ_1 e Γ_2.

04) (Treinamento Brasil/1999) Sejam I e O o incentro e o circuncentro do ΔABC. Sejam A', B', C' os pontos de tangência do círculo de centro I com os lados BC, CA, AB. Seja H o ortocentro do ΔA'B'C'. Prove que I, O e H são colineares.

05) Seja F o ponto médio da altura CH relativa ao lado AB de ponto médio E do ΔABC. Q e P são pontos sobre os lados AC e BC tais que QP//AB. R é a projeção de Q sobre AB. S é a interseção de EF e PR. Prove: S é o ponto médio de PR.

06) Três círculos de raio t (iguais) passam por um ponto T, são internos a um ΔABC e tangentes a dois desses lados (cada um). Prove que $t = \frac{rR}{r+R}$ e que T pertence ao segmento unindo os centros do circuncírculo e do incírculo do ΔABC.