Geometria Projetiva Básica Aplicada a Problemas Olímpicos

Edson Lopes

Polaridade

Dada uma circunferência **Ω** e um ponto X externo a ela, dizemos que a polar de X em relação a **Ω** é a reta que contém os pontos em que as tangentes, por X, a **Ω**, o tocam.
(Se X está em **Ω**, sua polar é a tangente por ele mesmo a **Ω**)

<u>É sempre interessante lembrar do fato que AO é perpendicular a polar de A, para A fora de Ω!</u>

Teorema 1 – Se a' é a reta polar do ponto A, e b' a do ponto B, temos que, se A pertence a b', B pertence a a' (defini-se 'A e B são conjugados').

Corolário 1 – Se C é a interseção das polares de A e B, a polar de C é AB.

Quádruplas Harmônicas

Se 4 pontos A,B,C e D são colineares e satisfazem AC.BD = AD.BC, dizemos que C e D dividem 'harmonicamente' o segmento AB.
Dizemos também que D é o conjugado harmônico de C, em relação a AB.
Vamos Construir Quádruplas Harmônicas!

Tomemos 3 pontos A, B e C colineares. A partir de A, tracemos 2 retas r, s (não passando por B ou C). Por C, tracemos uma reta p, que corta r e s, em E,H (resp.).
Agora, seja $BE \cap r = G$ e $BH \cap s = F$. Se prolongarmos FG até tocar a reta que contém A, B e C, teremos um ponto D, que é conjugado harmônico de C em relação a AB!!
(Facilmente demonstramos isso com o teorema de Menelaus)

Na Geometria plana, utilizamos infinito como conceito.
Aqui, é diferente, ele existe! Que ver?

Se tomarmos C como o ponto médio do segmento AB, quem será o conjugado harmônico dele? Nesse caso, teremos FG paralela a AB.
No plano projetivo, tomamos que qualquer feixe de retas paralelas, se encontra no infinito.
Chamamos então, $D\infty$ o conjugado!

Feixes Harmônicos

Feixe Harmônico são 4 retas concorremtes que passam, cada uma, por um ponto de uma quádrupla harmônica.

Sabe o que tem de legal nisso?

Teorema 2 – Dado um Feixe Harmônico (a,b,c,d) (as 4 retas), e uma reta r do plano (não paralela a nenhuma delas), consideremos que essa reta toque a,b,c e d em A,B,C e D, respectivamente. Temos que A,B,C e D formam uma quádrupla harmônica!

Teorema de Pascal

Dados 6 pontos A,B,C,D,E e F na circunferência (em qualquer ordem), temos que os pontos AB∩DE, BC∩EF e CD∩FA são colineares!

–

Mais uma vez, Polaridades.

Um corolário interessante do teorema de Pascal é uma mescla entre ele, e algumas polaridades!

Podemos Construir a reta polar de um ponto em relação a uma circunferência só com uma régua:
Dada uma circunferência Ω e um Ponto A fora dela, sejam r e s duas retas por A, secantes a Ω. A reta r toca Ω em B e C (C entre A e B) e a reta s toca Ω em D e E (D entre E e A). Sejam b, c, d, e, as polares de B,C,D,E. Seja BD∩CE = Y e BE∩CD = X. A reta que passa por X e Y é a polar de A

Exercício: Prove a afirmação acima usando o teorema de Pascal!

–

Outra coisa interessante sobre polaridade é que, dada uma circunferência Ω, um ponto A fora dela, a polar s de A e uma secante r, por A, que toca Ω em B e C e s em D, (A,B,C,D) é uma quádrupla harmônica!

–

Agora, vamos ao mais interessante!

Problemas

01. (China) Seja ABCD um quadrilátero circunscritível e E,F,G,H os pontos em que seu incírculo toca AB, BC, CD, DA, respectivamente. Seja X a interseção de AB e CD, e Y a interseção de AD e BC. Prove que X, F e H são colineares se, e somente se, Y, E e G também forem.

02. Seja ABCD um quadrilátero circunscritível e E,F,G,H os pontos em que seu incírculo toca AB, BC, CD, DA, respectivamente. Prove que AC, BD, EG e FH são concorrentes.

03. (Romanian TST 04) Seja I o incentro de um triangulo ABC e A’, B’ e C’ os pontos em que o incírculo toca BC, AC e AB, resp. Seja P a interseção de AA’ e BB’, M a interseção de AC com A’C’ e N a interseção de BC com B’C’. Prove que IP e MN são perpendiculares.

04. Seja ABCD um quadrilátero circunscritível e E,F,G,H os pontos em que seu incírculo toca AB, BC, CD, DA, respectivamente. Seja X a interseção de AB e CD, Y a interseção de AD e BC e K a interseção de EF e GH. Prove que X,Y e K são colineares.

05. (Taiwan – 98) Seja ABC um triangulo e M o ponto médio de BC. Sejam BB’ e CC’ alturas, H o ortocentro de ABC e D a interseção de B’C’ e BC. Prove que AM e DH são perpendiculares.

06. (Ibero – 98) Sejam D,E e F os pontos em que o incírculo do triangulo ABC toca BC, AC e AC, respectivamente. AD toca o incírculo novamente em Q. Prove que EQ passa pelo ponto médio de AF se, e somente se, CA = CB.

07. Dada uma circunferência Ω e um ponto A fora dela, sejam B e C os pontos de toque das tangentes, por A, a Ω. Seja r uma reta por A, que toca Ω em D e E. Se M é o ponto médio de BC, prove que BC bissecta o ângulo <DME.

08. (Iran – 2006) Seja ABC um triangulo, e Ω seu circuncírculo. Sejam O e H o circuncentro e o ortocentro de ABC, respectivamente. Seja A’ a interseção de AO com Ω. Seja A’’ a interseção de AH com Ω e A’’’ a interseção de A’H com Ω. Definamos de maneira análoga B’’, B’’’, C’’ e C’’’. Prove que A’’A’’’, B’’B’’’ , C’’C’’’ e OH concorrem.