Desigualdades com Contas (Parte I)

Edson Lopes

Nesse artigo vamos aprender a trabalhar um método extremamente útil para resolução de desigualdades. Definiremos diversas técnicas que necessitam, em geral, de paciência e habilidade com cálculos, e que resolvem muitos problemas que tem sido propostos em olimpíadas nos últimos anos. Não esqueça nunca, porém, de optar também por métodos mais simples e convencionais, por muitas vezes eles são mais propícios, se analisarmos o fator tempo.

Infelizmente o artigo está bem resumido, e servirá melhor apenas como base para pesquisar sobre o assunto. Apresentarei os principais teoremas que os ajudaram a vencer uma desigualdade nas contas, mostrando soluções pra alguns problemas usando os métodos apresentados.

No final do artigo tem uma sessão de problemas para praticar o que foi aprendido.

1 Majoração

Dado n inteiro positivo, sejam $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n)$ sequencias de reais satisfazendo $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ e $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$.

Dizemos que a primeira sequencia majora a segunda se:

$a_1 \geq b_1$
$a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$
...
$a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$

Define-se: $(a_1, a_2, ..., a_n) \succ (b_1, b_2, ..., b_n)$

1.1 Desigualdade de Karamata

Teorema 1. *(*Desigualdade de Karamata*) Se f é uma função convexa definida nos reais, e* $(a_1, a_2, ..., a_n) \succ (b_1, b_2, ..., b_n)$*, temos que:*

$$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_n)$$

Caso f seja concava, troca-se o sinal, e o resultado permanece correto

Corolário 1. *(*Desigualdade de Jensen*) Se* $b_i = \frac{a_1+...+a_n}{n}$*, para todo* $1 \leq i \leq n$*, obtemos:*

$$\frac{f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)}{n} \geq f(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n})$$

Problema 1. *Seja n um inteiro positivo e* $a_1, ..., a_n$ *reais positivos com* $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} i(i+1)$ *para k = 1, ... , n.*

Prove que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$

Solução. *Pelo enunciado,* $(n(n+1), (n-1)n, ..., 1.2) \succ (\sum_{i=1}^{n} i(i+1) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i, a_{n-1}, ..., a_1)$.

Veja que $\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} i(i+1) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i}$ *e que* $f(x) = \frac{1}{x}$ *é convexa nos reais positivos.*

Logo, pela desigualdade de karamata, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} i(i+1) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Para fixar a idéia de Karamata na cabeça, pense nesse problema:

Problema 2. *(Iran TST 2006) Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ reais. Prove que $\sum_{i,j=1}^{n} |x_i + x_j| \geq n \sum_{i=1}^{n} |x_i|$*

1.2 Contas, não tenho medo de vocês!

1.2.1 Somatórios Simétricos - Reduzindo Contas

Definimos $\sum_{sym} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n}$ em n variáveis como a soma de todos os números da forma $x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_n^{b_n}$, onde $(b_1, b_2, ..., b_n)$ são todas as permutações de $(a_1, a_2, ..., a_n)$. (Um somatório simétrico de n variáveis tem n! parcelas)

Por exemplo:

$\sum_{sym} a^2b$ em 3 variáveis $= a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$
$\sum_{sym} a^3b^2c$ em 3 variáveis $= a^3b^2c + a^3bc^2 + a^2b^3c + ab^3c^2 + a^2bc^3 + ab^2c^3$
$\sum_{sym} abc$ em 3 variáveis $= 6abc$

1.2.2 Desigualdade de Muirhead

Agora vamos conhecer aquele que talvez seja o mais importante teorema desse artigo, um brilhante e fortíssimo resultado sobre somatórios simétricos de reais positivos e majoração.

Teorema 2. *(Desigualdade de Muirhead, ou Bunching) Dadas duas sequencias de reais $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n)$, tais que $(a_1, a_2, ..., a_n) \succ (b_1, b_2, ..., b_n)$ e reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$, temos que:*

$$\sum_{sym} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_n^{b_n}$$

Parece feio, não? Vamos resolver alguns problemas pra mostrar o quão útil e simples é nosso teorema!

Problema 3. *(USAMO 97) Prove que, para todos os reais positivos a,b,c, vale*
$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{a^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Solução. *Se optarmos pelo método 'criativo' de resolver o problema, podemos notar que $\frac{abc}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{c}{a+b+c}$. Como isso não é trivial, podemos optar pelo método técnico:*

Veja que, abrindo tudo e multiplicando por 2, temos:
$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{a^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

$$\iff \sum_{sym} (a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)abc \leq 2(a^3 + b^3 + abc)(a^3 + c^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)$$

$$\iff \sum_{sym} a^7bc + 3a^4b^4c + 4a^5b^2c^2 + a^3b^3c^3 \leq \sum_{sym} a^7bc + 3a^4b^4c + 2a^5b^2c^2 + 2a^6b^3 + a^3b^3c^3$$

$$\iff \sum_{sym} 2a^6b^3 \geq \sum_{sym} 2a^5b^2c^2$$

Agora, veja que, $(6,3,0) \succ (5,2,2)$, ou seja, pelo teorema de Muirhead, o problema acabou.

Problema 4. *(IMO Shortlist 98) Sejam x,y,z reais positivos com xyz = 1. Prove que:*

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+y)(1+x)} \geq \frac{3}{4}$$

Solução. *Aqui iremos ensinar um método chamado homogenização.*

Dizemos que uma desigualdade é homogênea quando seu grau é o mesmo dos dois lados. Veja que nossa desigualdade tem vários graus, ou seja, se abrirmos tudo, vai ficar complicado usar Muirhead, pois a majoração só ocorre em sequencias de mesma soma. Logo, temos que tornar todo muito igual. Para isso, vamos usar que xyz = 1.

Façamos então $x = a^3$, $y = b^3$, $z = c^3$. Temos então abc = 1. Logo, transformando os 1's dos denomindores e numeradores em abc, nossa desigualdade fica assim:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+y)(1+x)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\frac{a^9}{(abc+b^3)(abc+c^3)} + \frac{b^9}{(abc+a^3)(abc+c^3)} + \frac{c^9}{(abc+b^3)(abc+a^3)} \geq \frac{3abc}{4}$$

Abrindo e multiplicando por 2, temos:

$\sum_{sym} a^9(abc+a^3) \geq \frac{3abc}{4}\sum_{sym}(abc+a^3)(abc+b^3)(abc+c^3)$

$\Longleftrightarrow 4\sum_{sym} a^{12}+a^{10}bc \geq 3a^2b^2c^2\sum_{sym}(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)$

$\Longleftrightarrow \sum_{sym} 4a^{12}+4a^{10}bc \geq \sum_{sym} 6a^4b^4c^4+a^5b^5c^2+a^6b^3c^3$

Veja que, por Muirhead,

$\sum_{sym} 4a^{12}bc \geq \sum_{sym} 4a^4b^4c^4$,
$\sum_{sym} 2a^{10}bc \geq \sum_{sym} 2a^4b^4c^4$,
$\sum_{sym} a^{10}bc \geq \sum_{sym} a^5b^5c^2$,
$\sum_{sym} a^{10}bc \geq \sum_{sym} a^6b^3c^3$.

Logo, o problema acabou.

2 Outras Desigualdades

2.1 Desigualdade de Schur

Teorema 3. (Desigualdade de Schur) *Dados a,b,c reais positivos e r um real aleatório diferente de 0, vale a desigualdade:*

$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-a)(b-c)+c^r(c-a)(c-b) \geq 0$

Vamos resolver um problema pra exemplificar sua utilidade.

Problema 5. (Polônia 2006) *Dados a,b,c reais positivos satisfazendo* $ab+bc+ca=3$, *prove que* $a^3+b^3+c^3+6abc \geq 9$

Solução. *Inicialmente, perceba que* $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, *pois* $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. *Logo,* $a+b+c \geq 3$. *Veja que isso implica* $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9$.
Logo, resta mostrar que $a^3+b^3+c^3+6abc \geq (a+b+c)(ab+bc+ca)$, *mas isso ocorre se, e somente se,* $a^3+b^3+c^3+3abc \geq \sum_{sym} a^2b$, *que é a desigualdade de schur pra r = 1.*

2.2 Desigualdade de Jensen Generalizada

Teorema 4. (Jensen Generalizado) *Sejam* $a_1,...,a_n$ *reais positivos tais que* $a_1+a_2+...+a_n=1$.

Se f é uma função convexa, vale $a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+...+a_nf(x_n) \geq f(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)$, *para reais* $x_1,...,x_n$.

Caso f seja concava, trocamos o sinal, e o resultado permanece correto.

Problema 6. (IMO 2001) *Sejam a,b,c reais positivos. Prove que:*

$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$

Solução. *Como nossa desigualdade é homogênea, podemos supor, sem perder a generalidade, que a+b+c=1.*
Assim, como $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ *é convexa nos reais positivos, temos:*

$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{a^34+b^3+c^3+24abc}}.$

Resta então mostrar que $a^3+b^3+c^3+24abc \leq 1=(a+b+c)^3$, *mas isso ocorre, pois é o mesmo que* $\sum_{sym} a^2b \geq \sum_{sym} abc$ *(verdadeiro por MA-MG, ou Muirhead)*

3 Problemas

Vamos então ao mais legal do artigo, a sessão de problemas!

Problema 7. *(*Desigualdade de Nesbitt*) Prove que para reais positivos a,b,c, vale* $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

Problema 8. *(*IMO 1995*) Dados a,b,c reais positivos com abc=1, prove que:*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(b+a)}\geq\frac{3}{2}$$

Problema 9. *(*IMO 2005*) Dados x,y,z reais positivos com xyz = 1, prove que:*

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}\geq 0\ .$$

Problema 10. *(*IRAN 1996*) Esse problema é do tipo 'resolva na porrada ou esteja em um dia iluminado'*

Sejam a,b,c reais positivos. Prove que:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(c+b)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

(Hint: Abra tudo, e lembre que a mistura de Muirhead e Schur é muito poderosa)

Problema 11. *(*Japão 1997*) Sejam a,b,c reais positivos. Prove que:*

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(b+a-c)^2}{(b+a)^2+c^2}+\frac{(a+c-b)^2}{(a+c)^2+b^2}\geq\frac{3}{5}$$

Problema 12. *(*IMO 2000*) Sejam a,b,c reais satisfazendo abc = 1. Prove que:*

$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})\leq 1$$

Problema 13. *(*IMO 1984*) Sejam x,y,z reais não-negativos tais que x+y+z = 1. Prove que* $0\leq xy+yz+zx-2xyz\leq\frac{7}{27}$

Problema 14. *(*Índia 2007*) Dados x,y,z reais positivos, prove que:*

$$(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2\leq 3(x^2+y^2+xy)(x^2+z^2+zx)(y^2+z^2+yz)$$

Problema 15. *Sejam a,b,c reais positivos. Prove que:*

$$\frac{1}{a^2+b^2+ab}+\frac{1}{a^2+c^2+ac}+\frac{1}{c^2+b^2+cb}\geq\frac{9}{(a+b+c)^2}$$