Desigualdades de Cauchy e suas aplicações

Cícero Thiago B. Magalhães
ciceroth@yahoo.com.br

Teorema (Desigualdade de Cauchy - 1a versão)
Sejam $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ números reais não todos nulos então a seguinte desigualdade ocorre:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

A igualdade ocorre somente se

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

Prova:

Nós podemos escrever

$$(xa_1 + b_1)^2 + (xa_2 + b_2)^2 + \ldots + (xa_n + b_n)^2 =$$

$$(x^2a_1^2 + 2xa_1b_1 + b_1^2) + \ldots + (x^2a_n^2 + 2xa_nb_n + b_n^2) =$$

$$Ax^2 + 2Bx + C,$$

onde

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2,$$

$$B = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,$$

$$C = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2.$$

O lado esquerdo da equação acima é, uma soma de quadrados, não - negativo para todo x; em particular para $x = -\dfrac{B}{A}$. Substituindo este valor em x na equação temos:

$$A\frac{B^2}{A^2} - 2B\frac{B}{A} + C = \frac{AC - B^2}{A} \ge 0.$$

Como $A > 0$ então $AC - B^2 \ge 0$. E a desigualdade está provada! A igualdade só é possível se

$$xa_1 + b_1 = xa_2 + b_2 = \ldots = xa_n + b_n,$$

que é o mesmo que,

$$\frac{b_1}{a_1} = \ldots = \frac{b_n}{a_n}(= -x)$$

Problema 1

(Teorema de Laguerre)

Suponha que todas as raízes do polinômio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ sejam reais. Então, as raízes pertencem ao intervalo de extremidades

$$-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}.$$

Prova:

Seja y uma das raízes e $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ as outras. Então, o polinômio deverá ser $(x-y)(x-y_1)\ldots(x-y_{n-1})$. Assim,

$$-a_{n-1} = y + y_1 + \ldots + y_{n-1}$$

$$a_{n-2} = y(y_{n-1} + \ldots + y_{n-1}) + \sum_{i<j} y_i y_j,$$

e, daí,

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2 = \sum_{i=1}^{n-1} {y_i}^2.$$

Pela desigualdade de Cauchy aplicada a $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ e $(1, \ldots, 1)$,

$$(a_{n-1} + y)^2 = (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})^2$$

$$\leq (n-1)\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2),$$

ou

$$y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}y + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} - \frac{n-2}{n}a_{n-1}^2 \leq 0.$$

Assim, os y (e portanto todos os y_i) estão entre as duas raízes da função quadrática, e essas raízes são nossos limitantes.

Problema 2

Seja P um polinômio com coeficientes positivos. Prove que se

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{P(x)}$$

ocorre para $x = 1$, então ocorre para todo $x > 0$.

Problema 3
Seja $n > 1$ um inteiro fixo, determine todos os reais positivos $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n$, tais que:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{1^2} + \dfrac{x_2}{2^2} + \ldots + \dfrac{x_n}{n^2} = \dfrac{n}{n+1} \\ \dfrac{1}{2^2x_1} + \dfrac{1}{3^2x_2} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)^2x_n} = \dfrac{n}{n+1} \end{cases}$$

Problema 4
Verifique que a função definida por $f(x) = \cos(\beta x)$ satisfaz a identidade $f(x)^2 = \frac{1}{2}(1 + f(2x))$ e prove que se $p_k \geq 0$ para $1 \leq k \leq n$ e $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ então

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cos(\beta_k x) \Rightarrow g(x)^2 \leq \frac{1}{2}(1 + g(2x)).$$

Teorema (Desigualdade de Cauchy - 2a versão)
Para quaisquer $x,\ y \in \mathbb{R}^n$, tem - se $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$. Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores $x,\ y$ é múltiplo esclar do outro.
Observação:
$\langle x, y\rangle$ representa o produto interno canônico do $\mathbb{R}^n$ e $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ representa a norma euclidiana.

Prova:
Lema:
Dados $x,\ y \in \mathbb{R}^n$, com $y \neq 0$ e pondo - se $\alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{|y|^2}$, o vetor $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y.

Prova do Lema:
Com efeito,

$$\langle z, y\rangle = \langle x - \alpha y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \alpha \langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \alpha|y|^2 = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0.$$

Prova do Teorema:
Isto é óbvio se $y = 0$. Se, porém, for $y \neq 0$, poremos $\alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{|y|^2}$. Como acabamos de ver, o vetor $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y. Segue - se daí que

$$|x|^2 = \langle z + \alpha y, z + \alpha y\rangle = |z|^2 + \alpha^2|y|^2$$

$$\Rightarrow |x|^2 \geq \alpha^2|y|^2 = \frac{\langle x, y\rangle^2}{|y|^2},$$

ou seja:

$|x|^2|y|^2 \geq \langle x, y\rangle^2$, como queríamos demonstrar. Vale a igualdade se, e somente se, $z = 0$, ou seja, $x = \alpha y$.

Problema 5
Prove que $|x+y| \leq |x| + |y|$ com $x,\ y \in \mathbb{R}^n$. (Desigualdade triangular)

Exercícios propostos:

1. Ache todos os números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que satisfaçam

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 96,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 144,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 216.$$

2. Prove a desigualdade

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i) \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i + b_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i})$$

$\forall\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ números positivos.

3. Sejam $x,\ y,\ z$ números reais positivos satisfazendo $x + y + z = \sqrt{xyz}$. Prove que $xy + yz + zx \geq 9(x + y + z)$.

4. Sejam a, b e c números reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

5. Se $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergem, prove que $\sum a_n b_n$ converge absolutamente.

6. Sejam $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ números reais não todos nulos. Determine o menor que $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ pode assumir, sabendo que $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ são números reais satisfazendo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_nx_n = 1$.

Referências:
1. The Cauchy - Schwarz Master Class: An introduction to the mathematical inequalities; J. Michael Steele.
2. Curso de Análise, Vol. I & II; Elon Lages Lima.
3. Proofs from the book; Aigner & Ziegler.