Prof. Cícero Thiago
Álgebra básica

Identidades fundamentais

a. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c. $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
d. $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
e. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
f. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
g. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
h. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

1. A soma de dois números é 21 e o produto é -7. Ache (i) a soma dos quadrados, (ii) a soma dos inversos e (iii) a soma das quarta potências.
Solução:

Sejam a e b os números. Temos que $a+b = 21$ e $a \cdot b = -7$. Então

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 21^2 - 2 \cdot (-7) = 455$$

e

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{21}{-7} = -3$$

e finalmente

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 455^2 - 2 \cdot (-7)^2 = 202223$$

2. Ache os inteiros positivos a e b tais que

$$\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

3. Sejam a, b números reais tais que $a^2 + b^2 = 4$ e $ab = -2$. Calcule $(a+b)^2$.

4. Se x, y e z são números reais não nulos, com $x + y + z$ também não nulo, calcule os possíveis valores da expressão $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2(xy + yz + zx)}$.

5. Seja $a \neq 0$ um número real, com $\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 = 3$. Calcule $a^3 + \dfrac{1}{a^3}$.

6. Sendo a, b, c números reais não nulos, prove que

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)^2-(a^3-b^3-c^3)^2}{b^3+c^3}=4a^3.$$

7. Sejam x, y, z números reais não nulos tais que $x+y+z=0$. Calcule o valor de

$$\frac{(y+z)^2}{x^2}+\frac{(x+z)^2}{y^2}+\frac{(x+y)^2}{z^2}.$$

8. Determine todos os inteiros positivos a e b que satisfazem a equação $a^2-b^2=120$.

9. Sejam a, b e c números reais dois a dois distintos. Prove que

$$\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}=\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)^2.$$

10. Fatore $a^3+b^3+c^3-3abc$.
Solução:

$a^3+b^3+c^3-3abc=$
$a^3+b^3+3ab(a+b)-3ab(a+b)+c^3-3abc=$
$(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc=$
$[(a+b)+c)]\,[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)=$
$(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)=$
$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

11. Fatore a^4+4b^4.

12. Prove que $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ é um inteiro.

13. Se x é um número real tal que $x+\frac{1}{x}=5$, determine o valor de $x^2+\frac{1}{x^2}$.

14. Prove que

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2003}=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{512}).$$

15. A soma de dois números é 2 e o produto é 5. Ache a soma de seus cubos.

16. Qual é o maior inteiro positivo n tal que

$$(n+10)|(n^3+10)?$$

17. Se $a+b+c=0$, determine o valor da expressão

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\cdot\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right).$$

18. Fatore $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

19. Ache todos os pares de inteiros (x,y) tais que $1+1996x+1998y=xy$.

Exercícios Propostos

1. Calcule o valor de

$$N=\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}.$$

2. Mostre que todo inteiro pode ser escrito como soma de 5 cubos.

3. (a) Efetue o produto

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)(x^{32}+1)(x^{64}+1)$$

(b) Racionalize a expressão

$$\frac{1}{(\sqrt[64]{2}+1)(\sqrt[32]{2}+1)(\sqrt[16]{2}+1)(\sqrt[8]{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)}$$

4. O número a é a média aritmética de três números, e b é a média aritmética de seus quadrados. Expresse a média aritmética de seus produtos dois a dois em termos de a e b.

5. Determine qual é o maior dos dois números

$$\frac{123456+10^{999}}{123457+10^{999}} \text{ e } \frac{123457+10^{999}}{123458+10^{999}}.$$

6. Mostrar que se $a+b+c=0$ então $a^3+b^3+c^3=3abc$.

7. Encontre o quociente da divisão de $a^{128}-b^{128}$ por

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})(a^{64}+b^{64}).$$

8. Calcule $\sqrt{(1000000)\cdot(1000001)\cdot(1000002)\cdot(1000003)+1}$.

9. Se $x^2+x+1=0$, calcule o valor numérico de

$$(x+\frac{1}{x})^2+(x^2+\frac{1}{x^2})^2+(x^3+\frac{1}{x^3})^2+\ldots+(x^{27}+\frac{1}{x^{27}})^2.$$

10. Calcule $123456789^2-123456790\times 123456788$.

11. Sejam $a,\ b,\ c,\ d$ números reais tais que: $a^3+b^3+c^3+d^3=a+b+c+d=0$. Prove que a soma de 2 destes números é 0.

12. Se $a,\ b,\ c$ são os comprimentos dos lados de um triângulo, prove que $a^3+b^3+3abc>c^3$.

13. Prove que o produto de quatro inteiros consecutivos, nenhum deles sendo 0, nunca é um quadrado perfeito.

14. Ache todos os pares de inteiros (x,y) tais que $x^3+y^3=(x+y)^2$.

15. Determine todos os pares de inteiros (m,n) tais que $m\cdot n\geq 0$ e

$$m^3+n^3+99mn=33^3.$$

16. Sejam $a,\ b,\ c$ números reais positivos tais que $a+b+c\leq 4$ e $ab+ac+ca\geq 4$. Prove que pelo menos duas das desigualdades $|a-b|\leq 2$, $|b-c|\leq 2$, $|c-a|\leq 2$ são verdadeiras.

17. Sejam x,y,z números reais não nulos e tais que $x+y+z=0$. Calcule o valor da expressão

$$\frac{x^3}{(y+z)^3}+\frac{y^3}{(x+z)^3}+\frac{z^3}{(x+y)^3}.$$

18. Simplifique a expressão $A=\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}-\dfrac{y^2}{(x-y)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(x-z)(z-y)}$.

19. Calcule o valor da expressão $S=\left(\dfrac{2004^3-1003^3-1001^3}{2004\cdot 1003\cdot 1001}\right)$.

20. Determine x e y naturais, tais que $x^2+361=y^2$.

21. Prove que, se x, y e z, são números reais distintos e

$$\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}=0,$$

então

$$\frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0.$$

22. Prove que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é um número racional.

23. Seja r um número real tal que

$$\sqrt[3]{r} + \frac{1}{\sqrt[3]{r}} = 3.$$

Determine o valor de

$$r^3 + \frac{1}{r^3}.$$

24. Prove que para todo inteiro $n > 2$, o número $2^{2^n-2} + 1$ não é um número primo.

25. Pedro e Cecília participam de um jogo com as seguintes regras: Pedro escolhe um inteiro positivo a e Cecília ganha dele se puder encontrar um inteiro positivo b, primo com a e tal que a decomposição em fatores primos de $a^3 + b^3$ contenha ao menos três primos distintos. Mostre que Cecília sempre pode ganhar.

26. Sejam $a,\ b$ e c números reas não nulos tais que $a + b + c = 0$. Calcule os possíveis valores de

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)}{(a^5+b^5+c^5)^2}.$$