XVI Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Terceira Lista de Preparação

1. Encontre todos os inteiros não negativos que podem ser obtidos pela expresssão: $\frac{a^2+ab+b^2}{ab-1}$. Onde a e b são inteiros não negativos.

2. Considere um cubo e M, N dois de seus vértices. Escreva 1 nesses vértices e 0 nos seis restantes. Um movimento consiste em escolher um vértice e somar uma unidade nos números escritos nos três vertices adjacentes ao escolhido. Prove que existe uma sequência de movimentos que torna todos os números dos vértices igauis se e somente se MN não é uma diagonal de uma das faces do cubo

3. Um tabuleiro $n \times n$, $n \leq 3$, é pintado de preto e branco da maneira usual. Um movimento consiste em escolher um quadrado 2×2 e trocar as cores das casas pela cor oposta. Ache todos os valores de n para os quais é possível tornar todas as casas do tabuleiro da mesma cor após uma quantidade finita de movimentos.

4. Seja ω o incírculo do triângulo ABC. Sejam M o ponto médio de BC e D a interseção de ω e BC. Seja ω_1 a circunferencia de centro M passando por D. As circunferências ω_2 e ω_3, são construidas analogamente. Mostre que se ω_1 tangencia o circuncírculo Γ de ABC, então ω_2 ou ω_3 também tangencia Γ.

5. Ache todas as soluções interias da equação $(m^2+n)(m+n^2) = (m+n)^3$

6. Seja $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, ...\}$. Ache todas as funções $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$. satisfazendo $f(3m + 2n) = f(m)f(n)$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}_0$

7. Seja ABC um triangulo acutângulo acutângulo com circuncentro O e D um ponto diferente de A e C no arco menor AC do circuncírculo de ABC. Sejam P, Q pontos em AB e BC tais que $\angle ADP = \angle OBC$ e $\angle CDQ = \angle OBA$. Mostre que $\angle DPQ = \angle DOC$.

8. Seja $p \geq 2$ e $q \geq 2$ inteiros positivos. Um conjunto X é dito legal se para quaisquer p subconjuntos $B_i \subset X, i = 1, 2, ..., p$, não necessariamente diferentes, cada um com q elementos, existe um conjunto $Y \subset X$ com p elementos tal que a interseção de Y com cada $B_i, i = 1, 2, ..., p$, tem no máximo um elemento. Mostre que:

a) Qualquer conjunto X com $pq - p$ elementos não é legal

b) Todo conjunto X com $pq - q + 1$ elementos é legal.

PRAZO PARA DEVOLUÇÃO: 08 de março