Terceira lista de preparação para a XVII Olimpíada de Matemática do Cone Sul

➤Problema 1
Encontre todos os primos ímpares p que dividem o número $1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + 2004^{p-1}$.

➤Problema 2
Dado um inteiro positivo n, $n \geq 3$, encontre o número de progressões aritméticas com 3 elementos contidas no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

➤Problema 3
Encontre todas as permutações $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $(1, 2, \ldots, n)$ com a seguinte propriedade:

$$\frac{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_i)}{(i+1)} \in \mathbb{Z}\,,\ \ \forall i\ \ 1 \leq i \leq n$$

➤Problema 4
Um ponto P está no interior de um triângulo $\triangle ABC$. O lado AC encontra a reta BP em Q e AB encontra CP em R. Suponha que $AR = RB = CP$ e $CQ = PQ$. Encontre $\angle BRC$.

➤Problema 5
Um triângulo acutângulo tem todos os seus lados distintos. Mostre que uma reta passando pelo seu circuncentro e pelo seu incentro intersecta o maior e o menor lado do triângulo.

➤Problema 6
Existem 2006 inteiros positivos tais que a soma de seus quadrados é um cubo e a soma de seus cubos é um quadrado?

➤Problema 7
Um inteiro positivo é escrito em cada quadradinho de um tabuleiro $n^2 \times n^2$. A diferença entre os números escritos em quadradinhos com uma aresta em comum é menor ou igual a n. Prove que pelo menos $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ quadradinhos comtém o mesmo número.

➤Problema 8
Os números 1 e -1 são escritos nos quadradinhos de um tabuleiro 2000×2000. A soma de todos os números do tabuleiro é não negativa. Prove que, existem 1000 linhas e 1000 colunas de modo que a soma dos números escritos nos quadradinhos de interseção dessas filas não é menor que 1000.

➤Problema 9
Sejam a, b, c, d números reais positivos tais que $abcd = 1$. Mostre que

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+cd}{1+c} + \frac{1+da}{1+d} \geq 4$$

.

Prazo para devolução: 10/04/06

http://www.treinamentoconesul.blogspot.com/