Caro Olímpico,

Estamos enviando em anexo a terceira lista de treinamento, as soluções da primeira lista, da primeira prova e o material teórico. Não é necessário enviar as soluções do material teórico.

Lembramos mais uma vez que todas as informações referentes ao treinamento e seleção para a Cone Sul estão disponíveis na internet, no endereço

`www.teorema.mat.br/conesul`.

Assim, você pode consultar as listas a partir da *data de envio* e verificar as soluções da prova de seleção na primeira segunda-feira após a prova.

O segundo teste de seleção será realizado no dia 20 de março de 14h às 18:30h.

Estamos a disposição para quaisquer esclarecimentos,

Boa Sorte!

Paulo José Rodrigues (Fortaleza)
`paulo@teorema.mat.br`

Luciano Castro (Rio de Janeiro)
`lucianogmcastro@ig.com.br`

Não envie as soluções da lista para a secretaria da OBM!

Envie as soluções para

```
Yuri Gomes Lima
Rua Nunes Valente, 981 / 702
Fortaleza - CE
CEP: 60.125-070
```

Facilite os trabalhos de correção das listas tomando os seguintes cuidados:

- Não escreva mais de uma questão por folha.
- Escreva seu nome em cada folha que usar.
- Utilize caneta azul ou preta, com letra legível!
- Tudo o que você escrever deve ser jutificado.

TERCEIRA LISTA DE PREPARAÇÃO PARA A XV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

▸ PROBLEMA 1

A calculadora SYLD-2004 pode realizar as seguintes operações: transformar um dado número x em $2x-1$ ou em $2x$. Prove que, usando a calculadora, podemos transformar qualquer número natural dado em uma quinta potência de um natural.

▸ PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo com $AC < BC$. Sejam F, H e O o pé da altura relativa ao lado AB, H o ortocentro de ABC e O o circuncentro de ABC. Seja também P a interseção de AC com a perpendicular a OF passando por F. Mostre que $P\hat{H}F = B\hat{A}C$.

▸ PROBLEMA 3

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é particionado em m progressões aritméticas disjuntas de razões $d_1, d_2, \ldots, d_m$. É possível que

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_m} < 0,9?$$

▸ PROBLEMA 4

É dado um conjunto A de $2n+1$ pessoas tal que, para todo subconjunto B de A com n pessoas, existe uma pessoa que não pertence a B e que conhece todas as pessoas de B. Mostre que existe uma pessoa de A que conhece todas as outras $2n$ pessoas.

▸ PROBLEMA 5

Seja B_n a quantidade de n-uplas ordenadas de inteiros positivos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tais que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Determine se B_{10} é par ou ímpar.

▸ PROBLEMA 6

Encontre todos os pares (x, y) de inteiros não negativos tais que

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3.$$

▸ PROBLEMA 7

Há n tipos de doce na loja do Zé. m amigos se juntam para ir à loja e cada um compra k doces diferentes. Cada tipo de doce é comprado por r dos amigos. Cada par de tipo de doces é escolhido por t amigos. Prove que:

(i) $mk = nr$;

(ii) $r(k-1) = t(n-1)$.

▸ PROBLEMA 8

Dado um círculo Γ, uma reta d é desenhada não intersectando Γ. M e N são pontos variáveis sobre a reta d tais que o círculo com diâmetro MN é externamente tangente a Γ. Prove que existe um ponto P no plano tal que, para qualquer tal segmento MN, o ângulo $M\hat{P}N$ é constante.

▸ PROBLEMA 9

Sejam k, n inteiros positivos, $n > 2$. Mostre que a equação

$$x^n - y^n = 2^k$$

não tem solução inteira positiva (x, y).

▸ PROBLEMA 10

Sejam M e N pontos no lado BC de um triângulo ABC tais que $BM = CN$, com M entre B e N. P e Q são pontos localizados, respectivamente, em AN e AM tais que $P\hat{M}C = M\hat{A}B$ e $Q\hat{N}B = N\hat{A}C$. Prove que $Q\hat{B}C = P\hat{C}B$.

▸ PROBLEMA 11

Seja $\mathbb{P}$ o conjunto de todos os primos e M um subconjunto de $\mathbb{P}$ com ao menos três elementos e tal que, para qualquer subconjunto próprio A de M, todos os fatores primos do número

$$-1 + \prod_{p \in A} p$$

pertencem a M. Prove que $M = \mathbb{P}$.

(Observação: X é subconjunto próprio de Y se $X \subset Y$ e $X \neq Y$.)

▸ PROBLEMA 12

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ uma função tal que

$$f(n) \geqslant \frac{1}{2}\left[f(n-1) + f(n+1)\right].$$

Prove que f é constante.

▸ PROBLEMA 13

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $A\hat{B}C = A\hat{D}C = 135°$ e

$$AC^2 \cdot BD^2 = 2 \cdot AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA.$$

Prove que as diagonais do quadrilátero são perpendiculares.

PRAZO PARA ENTREGA: 31 de março (data de postagem)