XVIII Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Terceira Lista de Preparação

Problema 1. Sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ inteiros tais que, para cada $1 \leq i \leq n$, ao menos um dos números a_i, b_i, c_i é ímpar. Mostre que existem inteiros r, s, t para os quais $ra_i + sb_i + tc_i$ é ímpar para pelo menos $4n/7$ valores de i, $1 \leq i \leq n$.

Problema 2. Encontre todas as soluções inteiras (x, y) da equação

$$x^{2006}y + 1 = y^{2007} + x.$$

Problema 3. Seja n um inteiro positivo dado. Mostre que existe um conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de inteiros positivos tal que cada a_i não divida a soma dos elementos de qualquer subconjunto não-vazio de $A - \{a_i\}$.

Problema 4. Um jogo é disputado por dois jogadores num plano infinito contendo 51 peças, sendo 50 ovelhas e 1 lobo. O primeiro jogador inicia o jogo movimentando o lobo. Em seguida, o segundo jogador move alguma ovelha, e assim sucessivamente. Em cada movimento, uma peça pode se movimentar até uma distância de 1 metro. É verdade que, independente da posição inicial das peças, o lobo sempre consegue capturar ao menos uma ovelha?

Problema 5. Seja ABC um triângulo de circuncírculo ω tal que $\angle BAC = 60^o$. Dado um ponto D sobre BC, sejam O_1, O_2 os circuncentros dos triângulos ABD e ACD, respectivamente, M a interseção de BO_1 e CO_2 e N o circuncírculo de DO_1O_2. Mostre que, ao variar D, MN passa por um ponto fixo.

Problema 6. Existe algum natural n para o qual existem $n-1$ progressões aritméticas com razões $2, 3, \ldots, n$ tais que qualquer natural está em pelo menos uma das progressões?

Problema 7. Seja ω o incírculo de um triângulo ABC. A mediana AM de ABC intersecta ω em K e L. As retas paralelas a BC passando por K e L intersectam ω novamente em X e Y. Sejam P, Q as interseções de BC com as retas AX e AY. Mostre que $BP = CQ$.

Problema 8. Sejam ABC um triângulo de circuncírculo ω_1, O o circuncentro de ABC e ω_2 o ex-incírculo relativo ao lado BC. Se M, N, L são os pontos de tangência de ω_2 com as retas BC, AC, AB e os raios de ω_1 e ω_2 são iguais, mostre que O é o ortocentro do triângulo MNL.

Problema 9. Sejam a, b inteiros positivos. A seqüência $x_1, x_2, \ldots$ é definida por:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Prove que existe um inteiro positivo k para o qual $x_k = 0$.

Problema 10. Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Ache todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{N}.$$

Problema 11. Uma seqüência $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reais satisfaz, para cada $n \geq 1$, a igualdade

$$\frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{a_{n+3} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}}.$$

Sabendo que $a_{11} = 4$, $a_{22} = 2$ e $a_{33} = 1$, mostre que, para todo natural k, a soma

$${a_1}^k + {a_2}^k + \cdots + {a_{100}}^k$$

é um quadrado perfeito.

Problema 12. Prove que a seqüência definida por $a_n = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor + \lfloor n\sqrt{3} \rfloor$, $n \in \mathbb{N}$, contém infinitos números ímpares e infinitos números pares.

Problema 13. Seja $n > 1$ um inteiro positivo tal que a soma dos cubos dos números $n-1, n$ e $n+1$ é igual ao cubo de um inteiro. Prove que n é um múltiplo de 4.

Problema 14. Seja $n > 6$ um inteiro positivo tal que $n-1$ e $n+1$ são primos. Mostre que $n^2(n^2+16)$ é divisível por 720. A recíproca é verdadeira?

Atenção: estamos enviando um material teórico de Equações Diofantinas

Prazo máximo para devolução: 26 de março

Aviso: Você deverá enviar a lista 3 para o endereço abaixo.

Samuel Barbosa Feitosa
Rua Padre Luis Figueira, 570/ apto 303
Fortaleza - CE
CEP 60.150-120

http://www.treinamentoconesul.blogspot.com/