Terceira lista de preparação para a
XVII Olimpíada de Matemática do Cone Sul

➤Problema 1
Ludmilson escreve todos os números inteiros de 1 até 100 em cartões e dá alguns deles para Ednalva. Sabe-se que para quaisquer dois cartões, um de Ludmilson e outro de Ednalva, o cartão com a soma desses dois números não é de Ludmilson e o cartão com o produto desses dois números não é de Ednalva. Determine o número de cartões de Ednalva se o cartão com número 13 é de Ludmilson.

➤Problema 2
Os inteiros positivos M e n são tais que M é divisível por todos os inteiros de 1 até n, mas não por $n+1, n+2$ e $n+3$. Encontre todos os valores possíveis de n.

➤Problema 3
Existe uma sequência de inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ estritamente crescente tal que $a_n \leq n^3$ para todo n e qualquer inteiro positivo possa ser representado de modo único como a diferença de dois membros desta sequência?

➤Problema 4
Sejam p, q e r números primos. É dado que o primo p divide $qr-1$, q divide $rp-1$ e r divide $pq-1$. Determine todos os valores possíveis de pqr.

➤Problema 5
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Considere os pontos $E = \overline{AD} \cap \overline{BC}$ e $I = \overline{AC} \cap \overline{BD}$. Prove que os triângulos EDC e IAB tem o mesmo baricentro se, e somente se, $AB \parallel CD$ e $\overline{IC}^2 = \overline{IA} \cdot \overline{AC}$.

➤Problema 6
Demonstre que existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que, se $C \subset \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ tem mais de $\dfrac{n^2}{1994}$ elementos, então existem $A, B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, com 1994 elementos cada um, tais que $A \times B \subset C$.

➤Problema 7
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Considere os pontos $P = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ e $Q = \overline{AD} \cap \overline{BC}$. Seja O um ponto inteiror de $ABCD$ tal que $\angle BOP = \angle DOQ$. Prove que $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

➤Problema 8
Seja M o conjunto de todos os números racionais sobre o intervalo aberto $(0, 1)$. Existe um subconjunto A de M tal que cada elemento de M possa ser representado de modo único como soma de um número finito de elementos distintos de A?

➤Problema 9
Encontre o número de subconjuntos B do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2005\}$ tal que a soma dos elementos de B é congruente a 2006 módulo 2048.

➤Problema 10
Seja X um conjunto finito de inteiros positivos. Demonstre que para cada subconjunto A de X, existe um subconjunto B de X, com a seguinte propriedade:

Para cada elemento e de X, e divide um número ímpar de elementos de B se, e somente se, e é um elemento de A.

➤Problema 11
Encontre uma progressão aritmética infinita não constante de inteiros positivos, tal que nenhum de seus termos seja soma de dois quadrados perfeitos ou de dois cubos.

➤Problema 12
Os números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pertecem ao intervalo $[-1, 1]$ e a soma de seus cubos é igual a zero. Prove que a soma $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ não excede $\dfrac{n}{3}$.

Prazo para devolução: 22/03/06

http://www.treinamentoconesul.blogspot.com/