Caro Olímpico,

Estamos enviando em anexo a segunda lista de treinamento para a XV Olimpíada do Cone Sul. As soluções da primeira lista serão enviadas brevemente.

Todas as informações referentes ao treinamento e seleção para a Cone Sul estão disponíveis na internet, no endereço

`www.teorema.mat.br/conesul`.

Assim, você pode consultar as listas a partir da *data de envio*.

Lembramos que o primeiro teste de seleção será realizado no dia 06 de março de 14h às 18:30h.

Estamos a disposição para quaisquer esclarecimentos,

Boa Sorte!

Paulo José Rodrigues (Fortaleza)
`paulo@teorema.mat.br`

Luciano Castro (Rio de Janeiro)
`lucianogmcastro@ig.com.br`

Não envie as soluções da lista para a secretaria da OBM!

Envie as soluções para

Yuri Gomes Lima
Rua Nunes Valente, 981 / 702
Fortaleza - CE
CEP: 60.125-070

Facilite os trabalhos de correção das listas tomando os seguintes cuidados:

- Não escreva mais de uma questão por folha.
- Escreva seu nome em cada folha que usar.
- Utilize caneta azul ou preta, com letra legível!
- Tudo o que você escrever deve ser jutificado.

SEGUNDA LISTA DE PREPARAÇÃO PARA A XV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO CONE SUL

▸ PROBLEMA 1

(Problema 3 da lista 1 corrigido) Seja $ABCD$ um retângulo e E, F pontos nos segmentos BC e DC, respectivamente, tais que $D\hat{A}F = F\hat{A}E$. Mostre que se

$$DF + BE = AE,$$

então $ABCD$ é um quadrado.

▸ PROBLEMA 2

Ache o menor número de elementos do conjunto

$$\{1, 2, 3, \ldots, 24\}$$

que devem ser apagados para garantir que o produto dos elementos restantes seja um cubo perfeito.

▸ PROBLEMA 3

Prove que não existem soluções inteiras para a equação

$$x^5 + y^5 + 1 = (x+2)^5 + (y-3)^5$$

▸ PROBLEMA 4

Seja D o ponto médio da base AB do triângulo acutângulo isósceles ABC. Escolha um ponto E sobre AB e seja O o circuncentro do triângulo ACE. Prove que a reta que passa por D e é perpendicular a DO, a reta que passa por E e é perpendicular a BC e a reta que passa por B e é paralela a AC são concorrentes.

▸ PROBLEMA 5

Num torneio de matemática, sabe-se que:

(i) Cada problema foi resolvido por exatamente 4 concorrentes;

(ii) O número de problemas é $n \geqslant 3$.

(iii) Para cada par de problemas, há exatamente um concorrente que resolveu ambos.

Assumindo uma quantidade suficientemente grande de participantes, ache o menor valor de n para o qual sempre existe um estudante que resolveu todos os problemas.

▸ PROBLEMA 6

No quadrilátero convexo $ABCD$, $AB = BD$ e os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{D}C$ medem $30°$ e $150°$, respectivamente. Prove que os ângulos $B\hat{C}A$ e $A\hat{C}D$ são congruentes.

▸ PROBLEMA 7

Seja m um inteiro positivo com um fator primo maior do que $\sqrt{2m} + 1$. Ache o menor inteiro positivo M tal que existe um conjunto T de inteiros positivos distintos satisfazendo simultaneamente as condições:

(i) m e M são respectivamente o menor e o maior elementos de T;

(ii) O produto de todos os elementos de T é um quadrado perfeito.

▸ PROBLEMA 8

Encontre todos os pares de conjuntos A, B que satisfazem as condições:

(i) $A \cup B = \mathbb{Z}$;

(ii) Se $x \in A$, então $x - 1 \in B$;

(iii) Se $x \in B$ e $y \in B$, então $x + y \in A$.

▸ PROBLEMA 9

Seja O o circuncentro de um triângulo isósceles ABC com $AB = BC$. M é um ponto qualquer de BO, M' é o simétrico de M em relação ao ponto médio de AB, K é a interseção de $M'O$ e AB e L é o ponto no lado BC tal que $C\hat{L}O = B\hat{L}M$. Mostre que os pontos O, K, B e L estão numa mesma circunferência.

▸ PROBLEMA 10

Seja $(F_n)_{n \geqslant 1}$ a seqüência de Fibonacci, definida por $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, para todo $n \geqslant 2$. Mostre que:

(a) F_n e F_{n+1} são primos entre si, para todo $n \geqslant 1$.

(b) Para todo $m \in \mathbb{N}$, existem infinitos n tais que m divide F_n.

(c) Seja $(a_n)_{n \geqslant 1}$ uma seqüência tal que $a_1 = 43$, $a_2 = 142$ e $a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}$, para todo $n \geqslant 2$. Mostre que, para todo $m \in \mathbb{N}$, existem infinitos números naturais n tais que $a_n - 1$ e $a_{n+1} - 1$ são ambos divisíveis por m.

PRAZO PARA ENTREGA: 12 de março (data de postagem)