XVIII Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Segunda Lista de Preparação

Problema 1. No interior de um quadrado unitário são escolhidos três pontos. Mostre que a distância entre dois deles não é maior que $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

Problema 2. Seja $ABCD$ um paralelogramo. A bissetriz de $\angle BAD$ corta BC em M e corta o prolongamento de CD em N. O circuncentro do triângulo MCN é O. Prove que B, O, C, D são concíclicos.

Problema 3. Seja $A = \{a_1 < a_2 < a_3 < \ldots\}$ uma sequência crescente de inteiros positivos em que o número de fatores primos de cada termo, contando fatores repetidos, nunca é maior que 2007. Prove que é sempre possível extrair do conjunto A um subconjunto infinito

$$B = \{b_1 < b_2 < b_3 < \ldots\}$$

tal que o máximo divisor comum entre b_i e b_j é sempre o mesmo quaisquer que sejam i, j naturais distintos.

Problema 4. Determine um inteiro positivo N tal que para todos os inteiros positivos m e n com $m < n$ e $n \geq N$ a desigualdade

$$m < \left(1 + \frac{1}{2007}\right)^n$$

seja satisfeita.

Problema 5. Existe algum conjunto A formado por sete inteiros positivos, nenhum deles maior que 24, tal que a soma dos elementos de cada um dos seus subconjuntos (não-vazios) seja distinta? Justifique.

Problema 6. Usando os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ construímos vários números de sete dígitos distintos. É possível que existam dois números dentre eles de modo que um divida o outro?

Problema 7. Sejam D um ponto sobre o lado BC do triângulo acutângulo ABC ($D \neq B$ e $D \neq C$), O_1 o circuncentro do triângulo ABD, O_2 o circuncentro do triângulo ACD e O o circuncentro do triângulo AO_1O_2. Determine o lugar geométrico do ponto O.

Problema 8. M é um subconjunto de $\{1, 2, 3, ..., 15\}$ tal que o produto de quaisquer três elementos distintos de M não é um quadrado. Determine o número máximo de elementos que M pode ter.

Problema 9. Mostre que, para cada inteiro positivo n, existe um inteiro positivo x tal que

$$\sqrt{x + 2006^n} + \sqrt{x} = (\sqrt{2007} + 1)^n$$

Problema 10. Prove que, para todo inteiro $k \geq 1$, existe um inteiro positivo n com a seguinte propriedade: na representação decimal de 2^n podemos encontrar um bloco composto de exatamente k zeros consecutivos, isto é,

$$2^n = \ldots a \underbrace{00\ldots00}_{k \text{ zeros}} b \ldots,$$

onde a, b são dígitos não nulos.

Problema 11. Seja ABC um triângulo acutângulo escaleno com circuncentro O. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC tal que $\angle PAB = \angle PBC$ e $\angle PAC = \angle PCB$. O ponto Q está sobre a reta BC satisfazendo $QA = QP$. Prove que $\angle AQP = 2\angle OQB$.

Problema 12. Encontre o valor máximo de

$$(x^3 + 1)(y^3 + 1)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x + y = 1$.

Atenção: estamos enviando um material teórico sobre o Princípio Extremo. Lembramos também que no site de treinamento encontram-se outros materiais e informações úteis para seu estudo.

Prazo máximo para devolução: 12 de março.

A próxima lista estará disponível no site a partir do dia 14 de março

http://www.treinamentoconesul.blogspot.com/