XVI Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Segunda Lista de Preparação

1. Ache o número mínimo de cores necessárias para colorir os inteiros 1, 2, ..., 2005 de modo que não exista uma tripla (a, b, c) de números da mesma cor tais que a divide b e b divide c.

2. Ache o maior inteiro positivo n tal que existe um conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de inteiros positivos satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) nenhum dos números a_i é primo;

(b) quaiquer dois números distintos a_i e a_j são primos entre si;

(c) $1 < a_i \leq (3n+1)^2, i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Prove que existem inteiros positivos m e n tais que

$$\left|\frac{m^2}{n^3} - \sqrt{2005}\right| < \frac{1}{10^8}$$

4. Em um torneio de vôlei Brasil-Argentina, participaram nove times brasileiros a mais que times argentinos. Cada par de times se enfrentou exatamente uma vez e os times brasileiros fizeram 9 vezes mais pontos do que os times argentinos (o vencedor leva 1 ponto e o perdedor 0). Qual o máximo possível de pontos ganhos por um time argentino?

5. Em cada casa de um tabuleiro $n \times n$ escrevemos um dos números $-1, 0$ e 1. É possível que a soma dos números de cada linha e cada coluna sejam dois a dois distintas, se

(a) $n = 4$?

(b) $n = 5$?

6. Sejam $a, b, c > 0$ tais que

$$a + b + c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\cdot$$

Prove que

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\cdot$$

7. Prove que não existe um inteiro positivo n tal que $2n^2+1$, $3n^2+1$ e $6n^2+1$ são todos quadrados perfeitos.

8. Considere a circunferência Γ de centro O e raio R. Seja A um ponto exterior a Γ. Trace um reta l por A, diferente de AO, cortando Γ em B e F, com B entre A e F. Seja l' a reta simétrica de l em relação a AO. Essa reta corta Γ em C e D, com C entre A e D. Mostre que a interseção das retas BD e CF independe da escolha da reta l.

9. Sejam Γ uma circunferência e l uma reta que não intersecta l. Seja AB o diâmetro de Γ perpendicular a l, com B mais próximo de l. Um ponto qualquer C diferente de A e B é escolhido sobre Γ. A reta AC intersecta l em D. A reta DE é tangente a Γ em E, com B e E do mesmo lado de AC. Seja F a interseção de BE e l e G a segunda interseção de AF e Γ. Seja também H a segunda interseção de CF e Γ. Mostre que AB é perpendicular a GH.

10. Uma competição de matemática consiste de 8 problemas. Dizemos que um competidor é *forte* se ele resolveu corretamente mais da metade dos problemas. Um problema é dito ser *difícil* se ele foi resolvido corretamente por menos da metade de todos os competidores fortes.

    (a) Determine o maior valor possível de problemas difíceis.

    (b) Na situação do item (a), determine o menor valor par possível e o maior valor ímpar possível de competidores fortes.

PRAZO PARA DEVOLUÇÃO: 21 de março

Estamos enviando um material de teoria combinatória dos números.

ATENÇÃO: em vista dos prazos para inscrição da equipe, as datas dos testes mudaram. Haverão três testes de seleção, nas seguintes datas:

Primeiro Teste de Seleção: 05/03 (Um dia com 4 problemas).

Segundo Teste de Seleção: 19/03 e 20/03 (Dois dias com 3 problemas cada).

Terceiro Teste de Seleção: 09/04 e 10/04 (Dois dias com 3 problemas cada).