11/02/2004

Caro Olímpico,

Como classificado na Olimpíada Brasileira de Matemática e nascido a partir de 01/01/1988, você é um potencial representante do Brasil na XV Olimpíada de Matemática do Cone Sul, a ser realizada no Paraguai em maio de 2004. Participam da Olimpíada de Matemática do Cone Sul estudantes da Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Equador, Paraguai, Peru e Uruguai.

A delegação de quatro estudantes brasileiros será escolhida com base nos resultados da OBM, em três listas de treinamento e em três testes de seleção, conforme calendário abaixo:

Teste de Seleção	Data
1	06/03
2	20/03
3	02/04

Listas	Data de Envio	Data de Devolução
1	11/02	26/02
2	26/02	12/03
3	12/03	31/03

As provas de seleção serão realizadas de 14h às 18 : 30h em local determinado pelo coordenador da OBM de sua região.

Estamos enviando em anexo a primeira lista com doze problemas e um pequeno material teórico sobre indução. Você não precisa enviar as soluções dos Exercícios Propostos ao final do material teórico.

As "Datas de Devolução" da tabela acima se referem ao prazo para postar as soluções nos correios. Listas enviadas fora do prazo podem não ser consideradas, porque estaremos enviando as soluções da mesma com a próxima lista.

O regulamento completo do *Processo de Seleção para Formação das Equipes Internacionais* está em anexo.

Estamos a disposição para quaisquer esclarecimentos,

Boa Sorte!

Paulo José Rodrigues (Fortaleza)
`paulo@teorema.mat.br`

Luciano Castro (Rio de Janeiro)
`lucianogmcastro@ig.com.br`

<u>Não</u> envie as soluções da lista para a secretaria da OBM!

Envie as soluções para

```
Yuri Gomes Lima
Rua Nunes Valente, 981 / 702
Fortaleza - CE
CEP: 60.125-070
```

Facilite os trabalhos de correção das listas tomando os seguintes cuidados:

- Não escreva mais de uma questão por folha.
- Escreva seu nome em cada folha que usar.
- Utilize caneta azul ou preta, com letra legível!
- Tudo o que você escrever deve ser jutificado.

A equipe de correção das listas (Davi, Larissa, Samuel e Yuri), agradece antecipadamente.

Processo de Seleção para formação das equipes internacionais.

Deste processo de seleção participam todos os alunos premiados com medalhas de ouro, prata, bronze e menções honrosas na OBM do ano imediatamente anterior ao processo de seleção.
Alunos que tenham ganhado Medalha de ouro, prata ou bronze em alguma OBM podem pedir para serem incluidos no processo de seleção para a IMO, Olimpíada Iberoamericana e Olimpíada do Cone Sul.
Caberá à comissão de olimpíadas decidir se aceita o pedido ou não.
Os alunos selecionados formarão as equipes que representarão o Brasil nas seguintes competições internacionais.

Olimpíada de Matemática do Cone Sul.

Equipe formada por 4 estudantes que não tenham feito 16 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da Olimpíada.

Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).

Equipe formada por 6 estudantes secundários ou que não tenham ingressado na Universidade ou equivalente na data da celebração da Olimpíada, (mês de julho).

Olimpíada Iberoamericana de Matemática (OIM).

Equipe formada por 4 estudantes.

(a) que não tenham feito 18 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da Olimpíada.

(b) que não tenham participado anteriormente em duas OIM.

Processo de Seleção:

(1) A comissão encarregada da seleção das equipes que representarão o Brasil nas competições internacionais (CES) deve elaborar rankings com a classificação e pontuação de todos os alunos participantes do processo em cada um dos seguintes eventos:

   (i) Resultado na OBM;

   (ii) Provas de seleção;

   (iii) Listas de treinamento.

(2) Finalmente a CES envia esses dados com uma sugestão de equipe para apreciação pela Comissão de Olimpíadas, que pode aprová-la ou sugerir as modificações que considerar adequadas. Caso CES e Comissão de Olimpíadas não entrem em acordo, a Comissão de Olimpíadas tem a última palavra.

(3) Depois da definição da equipe, a CES enviará para todos os participantes do processo de seleção uma carta com os resultados de ii e iii.

(4) A CES e a Comissão de Olimpíadas podem, se julgarem conveniente, levar em consideração os resultados dos estudantes em olimpíadas anteriores ou em provas de seleção e listas de preparação para outras olimpíadas.

(5) Assim, como na OBM, não haverá revisão de notas em ii e iii.

Primeira Lista de Preparação para a XV Olimpíada do Cone Sul

▶ PROBLEMA 1
Um comandante de uma companhia convocou voluntários para a constituição de 11 patrulhas. Todas as patrulhas são formadas por um mesmo número de homens. Por outro lado, cada homem participa de exatamente duas patrulhas e cada duas patrulhas têm exatamente um homem em comum. Determine o número de voluntários e o de integrantes de uma patrulha.

▶ PROBLEMA 2
Sejam a, b, c reais positivos tais que $abc = 1$. Mostre que

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geqslant \frac{6}{ab+bc+ca}.$$

▶ PROBLEMA 3
Seja $ABCD$ um retângulo e E, F pontos nos segmentos BC e DC, respectivamente, tais que $D\hat{A}F = F\hat{A}E$. Mostre que se

$$DE + BE = AE,$$

então $ABCD$ é um quadrado.

▶ PROBLEMA 4
Dado um conjunto de pessoas, formam-se comitês compostos de r pessoas cada e de modo que dados quaisquer $r+1$ comitês, existe pelo menos uma pessoa que está em todos esses comitês. Mostre que existe uma pessoa que está em todos os comitês.

▶ PROBLEMA 5
Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de reais positivos tais que

$$a_{n+1} = \sqrt{6 - 2a_n{}^2}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

Mostre que a sequência é constante.

▶ PROBLEMA 6
Determine todos os pares de inteiros positivos x, y satisfazendo a equação

$$(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1.$$

▶ PROBLEMA 7
Dizemos que um grupo de três pessoas é *legal* se todas as pessoas se conhecem ou todas se desconhecem entre si. Sabendo que se A conhece B, então B conhece A, mostre que num grupo de 6 pessoas existem pelo menos dois grupos legais.

▶ PROBLEMA 8
Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo e A_1,B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 os pontos médios dos lados AB, BC, CD, DE, EF e FA, respectivamente. Ache a área do hexágono em função das áreas dos triângulos ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 e FAB_1.

▶ PROBLEMA 9
Qual é o maior número de cores com que se pode pintar todos os quadrados de um tabuleiro 10×10 de modo que cada linha e cada coluna do tabuleiro tenha no máximo cinco cores diferentes?

▶ PROBLEMA 10
Prove que, para todo inteiro positivo n, existe um número de n dígitos divisível por 5^n com todos os dígitos ímpares.

▶ PROBLEMA 11
Um semicírculo com centro O e diâmetro AB é dado. A reta r intersecta AB em M e o semicírculo em C e D, de modo que $MB < MA$ e $MD < MC$. Os circuncírculos dos triângulos AOC e DOB se intersectam novamente em K. Mostre que as retas MK e KO são perpendiculares.

▶ PROBLEMA 12
Um conjunto de 2003 inteiros positivos é dado. Mostre que é possível escolher dois elementos do conjunto de modo que a soma desses dois não é um divisor da soma dos elementos restantes.

PRAZO PARA ENTREGA: 26 de fevereiro (data de postagem)