XVI Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Primeira Lista de Preparação

1. Um torneio de futebol consiste de n times. Sabemos que cada time jogou exatamente uma vez com cada outro, e que para quaisquer dois times A e B, existem exatamente t times que perderam de A e B. Mostre que $n = 4t + 3$.

2. Seja O um ponto interior do triângulo acutângulo ABC. Os círculos com centros nos pontos médios dos lados e passando por O se intersectam novamente nos pontos K, L e M. Mostre que O é o incentro de KLM se e somente se O é o circuncentro de ABC.

3. Existe um conjunto infinito $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que, para todos $a, b \in S$, $(ab)^2$ é divisível por $a^2 - ab + b^2$?

4. Seja A um conjunto de inteiros positivos satisfazendo:

a) Se $a \in A$, então todos os divisores positivos de a estão em A.

b) Se $a, b \in A$, com $1 < a < b$, então $1 + ab \in A$.

Prove que se A tem pelo menos três elementos, então A é o conjunto dos números naturais.

5. Encontre todas as soluções (x, y) da equação

$$x^y - y^x = xy^2 - 19,$$

onde x e y são primos.

6. Os números de 1 a 100 são arranjados ao redor de um círculo e são calculadas todas as 100 somas de três números consecutivos. Mostre que existem duas dessas somas cuja diferença é maior que 2.

7. Seja ABC um triângulo com $\angle BAC = 60^o$. Sejam A' o simétrico de A com relação a BC, D o ponto sobre AC tal que $AB = AD$ e H o ortocentro de ABC. Se l é a bissetriz externa de $\angle BAC$, $M = A'D \cap l$ e $N = CH \cap l$, mostre que $AM = AN$.

8. Existe um número natural $n > 10^{1000}$ não divisível por 10 e tal que podemos trocar dois dígitos distintos não-nulos de sua representação decimal de modo que o conjunto dos divisores primos do número resultante não mude?

9. Considere um polígono regular de 1000 lados. Cada vértice é pintado usando-se uma das cores vermelho, azul ou amarelo. Um movimento consiste em escolher dois vértices vizinhos de cores diferentes e recolorí-los com a terceira cor. Prove que é possível, utilizando um número finito de movimentos, tornar todos os vértices do polígono da mesma cor.

10. Um triângulo acutângulo ABC tem circunraio R, inraio r e seu maior ângulo é $\angle BAC$. Sejam M o ponto médio de BC e X a interseção das duas retas tangentes ao circuncírculo de ABC passando por B e C. Mostre que

$$\frac{r}{R} \geq \frac{AM}{AX}\,.$$

11. Considere um grupo de n pessoas tal que, para quaisquer 3 delas, existem 2 que não se conhecem. Ademais, para qualquer partição das pessoas em dois grupos, algum dos grupos contém um par de pessoas que se conhecem. Prove que existe alguém que conhece no máximo $2n/5$ pessoas.

12. Sejam x, y, z reais positivos tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Calcule o valor mínimo da expressão

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\,.$$

PRAZO PARA DEVOLUÇÃO: 02 de março