Segunda lista de preparação para a XVII Olimpíada de Matemática do Cone Sul

➤**Problema 1**
Mostre que, em uma festa com um número par de pessoas, existem duas com um número par de amigos em comum.
➤**Problema 2**
O segmento AB intersecta dois círculos de mesmo raio, é paralelo à reta que liga os centros desses círculos e todos os pontos de interseção desse segmento com os círculos estão entre A e B. Por A, traçamos tangentes ao círculo mais próximo de A, e por B, traçamos tangentes ao círculo mais próximo de B. Verifica-se que o quadrilátero formado pelas quatro tangentes contém ambos os círculos. Prove que este quadrilátero é circunscritível.
➤**Problema 3**
Sejam A_1, B_1 e C_1 as interseções das bissetrizes internas de um triângulo ABC com os lados BC, CA e AB, respectivamente, e sejam A_2, B_2 e C_2 os pontos médios dos segmentos B_1C_1, C_1A_1 e A_1B_1, respectivamente. Prove que AA_2, BB_2 e CC_2 são concorrentes.
➤**Problema 4**
Encontrar todas as soluções inteiras da equação

$$x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y.$$

➤**Problema 5**
Sejam ABC e $A^{'}BC$ dois triângulos equiláteros ($A \neq A^{'}$) e D um ponto variável sobre o lado AC. Se $A^{'}D$ intersecta o lado AB em E e BD intersecta CE em P. Demonstre que P pertence à circunferência circunscrita ao triângulo ABC.
➤**Problema 6**
Ludmilson e Ednalva jogam, em turnos, o seguinte jogo: cada um, em sua vez, escreve um número natural que seja divisor de 100! e que não tenha sido escrito anteriormente. Depois de cada jogada, o máximo divisor comum de todos os números escritos é calculado, e se este máximo for igual a 1, o jogo termina e perde o jogador que escreveu o último número. Se Ludmilson começa o jogo(escreve o primeiro número), qual dos jogadores tem estratégia vencedora?
➤**Problema 7**
Cada casa de um tabuleiro 17×17 pode ser pintada de preto ou branco. No início, todas são brancas. Um movimento consiste em mudar a cor de cinco casas consecutivas (horizontalmente, verticalmente ou na diagonal). É possível, após uma certa quantidade de movimentos, obter todas as casas pintadas de preto?
➤**Problema 8**
Prove que, se todos os vértices de um polígono no plano Euclidiano distam no máximo 1, um do outro, então a área desse polígono é menor que $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
➤**Problema 9**
Ache o maior inteiro n, $n > 10$, tal que o resto de n quando divido por qualquer quadrado entre 2 e $\frac{n}{2}$ é impar.