XVIII Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Primeira Lista de Preparação

Problema 1. Encontre todos os primos p para os quais existam inteiros m, n satisfazendo as condições

$$p = m^2 + n^2 \quad \text{e} \quad p | m^3 + n^3 - 4.$$

Problema 2. Todos os pares de pontos de um conjunto de 200 pontos do espaço estão ligados por segmentos que não se intersectam. Cada segmento é pintado de uma cor e o número de cores é k. Aroldo quer pintar cada um dos 200 pontos com uma das k cores de modo que o segmento que una dois pontos da mesma cor não tenha a cor de seus extremos. Aroldo pode fazer essa pintura se

1. $k = 7$?
2. $k = 10$?

Problema 3. As alturas AD e BE do triângulo ABC se encontram no ortocentro H. Os pontos médios de AB e CH são X e Y, respectivamente. Prove que XY é perpendicular a DE.

Problema 4. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para as quais

$$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4, \quad \text{para todo real } x.$$

Problema 5. Um quadro negro está inicialmente apagado. Em cada movimento, pode-se adicionar dois 1's ou apagar duas cópias de um mesmo número n e colocar em seus lugares os números $n-1$ e $n+1$. Qual é o número mínimo de movimentos necessários para colocar 2007 no quadro negro?

Problema 6. Considere o triângulo ABC cujos comprimentos dos lados são a, b, c, onde a é o maior lado. Prove que ABC é retângulo se, e somente se,

$$(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}) = (a+b+c)\sqrt{2}.$$

Problema 7. Sobre uma circunferência existe um número finito de pontos vermelhos. Em cada ponto está escrito um número positivo menor ou igual a 1. A circunferência é dividida em três arcos de modo que nenhum ponto vermelho é extremo de um arco. A soma dos números escritos de cada arco é calculada (se um arco não tem pontos vermelhos, sua soma é zero). Prove que é sempre possível encontrar uma divisão da circunferência para a qual a diferença entre o maior e o menor valor obtidos seja no máximo 1.

Problema 8. Determine o maior inteiro positivo n para o qual existe uma única tripla (x, y, z) de inteiros positivos tais que

$$99x + 100y + 101z = n.$$

Problema 9. Um círculo com centro I está dentro de outro círculo. AB é uma corda variável do círculo maior que é tangente ao círculo menor. Determine o lugar geométrico do circuncentro do triângulo ABI.

Problema 10. Sejam x, y inteiros. Prove que $3x^2 + 4y^2$ e $4x^2 + 3y^2$ não podem ser ambos quadrados perfeitos.

Problema 11. Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H, incentro I e tal que $AC \neq BC$. As retas CH e CI encontram o circuncírculo de ABC nos pontos D e L, respectivamente. Prove que $\angle CIH = 90°$ se, e somente se, $\angle IDL = 90°$.

Problema 12. Ache o menor inteiro não-negativo n para o qual exista uma função não-constante $f : \mathbb{Z} \to [0, +\infty)$ tal que, para quaisquer inteiros x, y, tenhamos

1. $f(xy) = f(x)f(y)$, e
2. $2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Atenção: estamos enviando um material teórico de Teoria Combinatória dos Números. Lembramos também que no site de treinamento encontram-se outros materiais e informações úteis para seu estudo.

Prazo máximo para devolução: 22 de fevereiro.

http://www.treinamentoconesul.blogspot.com/