Primeira lista de preparação para a XVII Olimpíada de Matemática do Cone Sul

1. Todas as diagonais de um polígono regular de 25 lados são desenhadas. Prove que não existem 9 diagonais passando por um ponto interior ao polígono.

2. Seja M o ponto de interseção das diagonais de um quadrilátero inscritível $ABCD$, em que $\angle AMB$ é agudo. O triângulo isósceles BCK é construído exteriormente ao quadrilátero, com base a base sendo BC, tal que $\angle KBC + \angle AMB = 90^o$. Prove que KM é perpendicular a AD.

3. Encontre o menor $n > 4$, para o qual é possível existir um país de n cidades ligadas por estradas satisfazendo as seguintes condições:

(i) Não exitem três estradas ligando três cidades entre si;

(ii) Para cada par de cidades que não estão ligadas por uma estrada, é sempre possível encontrar exatamente duas outras cidades ligadas a ambas por estradas.

Observação: Cada estrada liga apenas duas cidades e não existe mais de uma estrada entre duas cidades.

4. Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ n inteiros distintos. Mostre que o produto de todas as frações da forma $\dfrac{a_k - a_l}{k - l}$, onde $n \geq k > l \geq 1$ é inteiro.

5. Todas as expressões da forma

$$\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \ldots \pm \sqrt{100}$$

(com todas as possíveis combinações de sinais) são multiplicadas entre si. Prove que o resultado é:
(a) um inteiro;
(b) o quadrado de um inteiro.

6. Prove que para qualquer $n > 1$, existe uma potência de 10 com n dígitos na base 2 ou uma potência de 10 com n dígitos na base 5, mas não ambos os casos.

7. Seja ABC umn triângulo com circunraio $R = 1$. Seja r o inraio do triângulo ABC e p o inraio do triângulo órtico $A_1B_1C_1$. Mostre que $p \leq 1 - \dfrac{1}{3}(1 + r)^2$.

8. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que $f(n + 1) > f(n)$ e $f(f(n)) = 3n$, para todo n natural. Determine $f(2001)$.